Sammlung Göschen

Unser heutiges Wissen

Mathematische Bibliothek

aus der Sammlung Göschen.

Jedes Bändchen eleg. in Leinwand gebunden 80 Pfennig.

Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate m. 15 Fig. u. 2 Taf. v. Prof. Wilh. Weitbrecht. Nr. 302.

Vektoranalysis mit 11 Figuren von Privatdoz. Dr. Siegfr. Valentiner. Nr. 354.

Astronomische Geographie mit 52 Figuren von Professor Dr. Siegm. Günther. Nr. 92.

Astronomie mit 36 Abbildungen und einer Karte von Professor Dr. Walter F. Wislicenus, neubearbeitet von Prof. Dr. Herm. Kobold. Bd. 1. Nr. 11.

Astrophysik mit 15 Abbildungen von Prof. Dr. Walter F. Wislicenus, neubearbeitet von Dr. H. Ludendorff. Nr. 91.

Geodäsie mit 66 Abbildungen von Prof. Dr. C. Reinhertz. Nr. 102.

Vermessungskunde von Oberlehrer Dipl.-Ing. P. Werkmeister. 2 Bändchen mit 255 Abbildungen. Nr. 468, 469.

Nautik. Kurzer Abriß des täglich an Bord von Handelsschiffen angewandt. Teils d. Schiffahrtskunde m. 56 Abb. v. Dr. Franz Schulze. Nr. 84.

Geometrisches Zeichnen mit 290 Figuren und 23 Tafeln von H. Becker, neubearbeitet von Prof. J. Vonderlinn. Nr. 58.

Sammlung Göschen

Determinanten

Von

Paul B. Fischer
Oberlehrer an der Oberrealschule zu Groß-Lichterfelde



Leipzig
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
1908

Spamersche Buchdruckerei in Leipzig.

Inhaltsverzeichnis.

Literatur.

Jacobi, Über die Bildung und die Eigenschaften der Determinanten (1841). Leipzig (1896). Ostwalds Klassiker Nr. 77.

Brioschi, Theorie der Determinanten. Pavia (1854), Berlin (1856).

Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten. Leipzig (1857), 5. Aufl. (1881).

Salmon-Fiedler, Algebra der linearen Transformationen. Leipzig (1863 u. 1877).

Hesse, Die Determinanten. Leipzig (1872).

Dölp, Die Determinanten. Darmstadt (1883).

Günther, Lehrbuch der Determinantentheorie. Erlangen (1875 u. 1877).

Mansion, Elemente der Theorie der Determinanten. Paris (1883), Leipzig (1899).

Gordan, Vorlesungen über Invariantentheorie. I. Bd. Determinanten. Leipzig (1885).

Pascal, Die Determinanten. Mailand (1897), Leipzig (1900). (Besonders als Nachschlagewerk für Literaturangaben zu benutzen.)

Kronecker, Vorlesungen über die Theorie der Determinanten. Leipzig (1903).

I. Einleitung.

§ 1. Wie gelangte man zum Begriff der Determinanten?

Soll ein System von n linearen Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten nach diesen Unbekannten aufgelöst werden, so lehrt die Elementarmathematik folgendes Lösungsverfahren:

Durch Elimination einer von den n Unbekannten führt man die gegebenen n Gleichungen auf andere $n - 1$ ebenfalls lineare Gleichungen ohne jene Unbekannte zurück; die so erhaltenen $n - 1$ Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten führt man auf $n - 2$ Gleichungen mit $n - 2$ Unbekannten durch Elimination einer zweiten Unbekannten zurück und fährt so fort, bis man auf eine einzige Gleichung mit einer Unbekannten stößt. Diese letzte Unbekannte stellt sich dann in Bruchform dar, und auf dieselbe Weise ergeben sich alle übrigen Unbekannten des Systems, jede auch in Bruchform. Die Zähler und Nenner dieser Brüche sind von den gegebenen Größen des zu lösenden Gleichungssystems gebildet.

Nach Angabe dieses „allgemeinen Lösungsverfahrens“ mögen die speziellen Fälle $n = 3$ und 4 betrachtet werden, um daran die Brauchbarkeit dieser Methode, im besonderen deren Unvollkommenheit kennen zu lernen.

(A) $n = 3$.

$$\begin{array}{l|c|c} a_1 x + b_1 y + c_1 z = m_1 & c_2 & \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = m_2 & -c_1 & c_3 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = m_3 & & -c_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} (a_1 c_2 - a_2 c_1) x + (b_1 c_2 - b_2 c_1) y & \\ \qquad = (m_1 c_2 - m_2 c_1) & (b_2 c_3 - b_3 c_2) \\ (a_2 c_3 - a_3 c_2) x + (b_2 c_3 - b_3 c_2) y & \\ \qquad = (m_2 c_3 - m_3 c_2) & -(b_1 c_2 - b_2 c_1). \end{array}$$

$$\{(a_1 c_2 - a_2 c_1)(b_2 c_3 - b_3 c_2) - (a_2 c_3 - a_3 c_2)(b_1 c_2 - b_2 c_1)\} \cdot x$$
$$= (m_1 c_2 - m_2 c_1)(b_2 c_3 - b_3 c_2) - (m_2 c_3 - m_3 c_2)(b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

$$x = \frac{\begin{array}{c} m_1 b_2 c_2 c_3 - \underline{m_2 b_2 c_1 c_3} - m_1 b_3 c_2^2 + m_2 b_3 c_1 c_2 \\ - m_2 b_1 c_2 c_3 + m_3 b_1 c_2^2 + \underline{m_2 b_2 c_1 c_3} - m_3 b_2 c_1 c_2 \end{array}}{\begin{array}{c} a_1 b_2 c_2 c_3 - \underline{a_2 b_2 c_1 c_3} - a_1 b_3 c_2^2 + a_2 b_3 c_1 c_2 \\ - a_2 b_1 c_2 c_3 + a_3 b_1 c_2^2 + \underline{a_2 b_2 c_1 c_3} - a_3 b_2 c_1 c_2 \end{array}}.$$

Läßt man die unterstrichenen Glieder weg und kürzt man mit c_2, so wird:

$$x = \frac{m_1 b_2 c_3 - m_1 b_3 c_2 + m_2 b_3 c_1 - m_2 b_1 c_3 + m_3 b_1 c_2 - m_3 b_2 c_1}{a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1}.$$

In entsprechender Weise würde man finden:

$$y = \frac{a_1 m_2 c_3 - a_1 m_3 c_2 + a_2 m_3 c_1 - a_2 m_1 c_3 + a_3 m_1 c_2 - a_3 m_2 c_1}{a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1}.$$

$$z = \frac{a_1 b_2 m_3 - a_1 b_3 m_2 + a_2 b_3 m_1 - a_2 b_1 m_3 + a_3 b_1 m_2 - a_3 b_2 m_1}{a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1}.$$

(B) $$n = 4\,.$$

$$\begin{array}{l|c|c|c}
a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 w = m_1 & d_2 & & \\
a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 w = m_2 & -d_1 & d_3 & \\
a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 w = m_3 & & -d_2 & d_4 \\
a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 w = m_4 & & & -d_3\,.
\end{array}$$

$$(a_1 d_2 - a_2 d_1)x + (b_1 d_2 - b_2 d_1)y + (c_1 d_2 - c_2 d_1)z = (m_1 d_2 - m_2 d_1)\,,$$
$$(a_2 d_3 - a_3 d_2)x + (b_2 d_3 - b_3 d_2)y + (c_2 d_3 - c_3 d_2)z = (m_2 d_3 - m_3 d_2)\,,$$
$$(a_3 d_4 - a_4 d_3)x + (b_3 d_4 - b_4 d_3)y + (c_3 d_4 - c_4 d_3)z = (m_3 d_4 - m_4 d_3)\,.$$

Hiermit ist das Beispiel (B) auf (A) zurückgeführt. Bedenkt man, daß alle Größen a, b, c, m in (A) durch Ausdrücke von der Form $(\alpha\beta - \gamma\delta)$ ersetzt werden müssen, um in (B) die Rechnung zu beenden, so hat man eine Vorstellung von der weiteren Durchführung der Rechnung.

Aus den Beispielen (A) und (B) kann man ersehen, daß sich die Rechnung für ein System von fünf Gleichungen mit fünf Unbekannten bereits recht umständlich gestaltet, ja daß dieselbe schon für wenig mehr Unbekannte geradezu ans Unausführbare grenzt, falls die allgemeinen Buchstabengrößen nicht numerisch gegeben sind.

Recht unangenehm ist bei dem angegebenen Verfahren ferner, daß man in der Lösung einmal eine unnötig große Anzahl Glieder, dann aber einen überflüssigen Faktor erhält, der bei drei Unbekannten in der ersten Dimension auftritt, bei mehr jedoch immer höherer und höherer Dimension wird; bei (B) ist er bereits $(c_2 d_3 - c_3 d_2)$. Natürlich wird die Zurückführung der Lösungen auf die einfachste Form, also der letzte Schritt des allgemeinen

Verfahrens, durch diesen lästigen Faktor für eine größere Anzahl Gleichungen immer schwieriger.

Man sieht also, daß dieses allgemeine Lösungsverfahren die Rechnung durch einen Teil unnötiger Arbeit erschwert, der um so beträchtlicher wird, je größer die Anzahl der Gleichungen ist.

Diese Betrachtungen lassen erkennen, daß die Mathematiker sich bemühen mußten, einen Weg zu finden, durch den die umständliche, an unnötiger Arbeit reiche und zum größten Teil unausführbare Rechnung vermieden wurde.

Das Ergebnis dieser Forschungen konnte zu nichts anderem führen als zu den Determinanten, denn diese sind eben die von allen überflüssigen Faktoren freien, aus den gegebenen Größen der vorgelegten Gleichungen in einfachster Weise zusammengesetzten Ausdrücke für die Zähler und Nenner derjenigen Brüche, als welche sich die Werte der Unbekannten in den gegebenen Gleichungen darstellen.

Einen weiteren vorläufigen Einblick in die Bedeutung der Determinanten werden die folgenden Betrachtungen geben.

§ 2. Historische Betrachtungen.

Gegen Ende des 17. Jahrhunderts suchte Leibniz die Auflösung von linearen Gleichungen nach den Unbekannten wegen der Unbrauchbarkeit des eben näher beleuchteten allgemeinen Lösungsverfahrens mit Hilfe einer besonderen Art kombinatorischer Aggregate zu lösen, die wir heute als Determinanten bezeichnen können. Schriftliche Aufzeichnungen darüber hat man in einem Briefe von Leibniz (1693) an seinen Freund Marquis de l'Hospital und in den „Acta Eruditorum“ gefunden. Aus beiden Aufzeichnungen kann man entnehmen, daß sich Leibniz der Bedeutung seiner Erfindung wohl bewußt war, denn am

Ende jenes Briefes steht: „Man sieht hier, auf was ich schon gelegentlich hingewiesen habe, daß die Vervollkommnung der Algebra von der Kombination abhängt."

Leider hat es Leibniz nicht verstanden, seine Erfindung fruchtbar für die Zukunft zu gestalten. Weder er selbst, noch andere kamen in der nächsten Zeit auf seine Gedanken zurück, und so geriet dieser erste Ansatz zu den Determinanten völlig in Vergessenheit. Der Grund dafür ist jedenfalls darin zu suchen, daß in jener Zeit die wichtigen Fragen über die Anfangsgründe der Infinitesimalrechnung im Vordergrund standen, welche kein rechtes Bedürfnis aufkommen ließen, die neuen Methoden von Leibniz zu benutzen.

Erst Dirichlet ist es gelungen, Leibniz als Erfinder der Determinanten zu erkennen. Bis dahin wurde allgemein Gabriel Cramer als solcher angesehen. Jedoch auch heute noch hat dieser Mathematiker wenigstens als Begründer dieser Lehre zu gelten, denn er hat 1750, völlig unabhängig von Leibniz, in einem seiner Werke die Determinanten allgemein definiert und bereits die Auflösung linearer Gleichungen mit ihrer Hilfe genau so beschrieben, wie sie heute die Determinantenlehre angibt. Allerdings waren Namen und Bezeichnungsweisen noch nicht so wie heutzutage.

Aber noch nahezu 100 Jahre sollte es dauern, ehe die Determinanten „Gemeingut der Mathematiker" wurden. Nur den Größten jener Zeit waren sie ein vertrautes Instrument; aber jeder von ihnen dehnte seine Untersuchungen in diesem Gebiet nur gerade so weit aus, als es ihm erforderlich erschien. Hervorzuheben sind hierbei die Namen: Bézout, Vandermonde, Laplace, Lagrange, Gauß, Binet. Es würde natürlich zu weit führen, wollte man auf das Verdienst eines jeden eingehen.

Der erste, welcher um ihrer selbst willen die Determinanten eingehender behandelte, war Cauchy. Er brachte die elementare Determinantenlehre zum Abschluß; er hat auch die Bezeichnung „Determinante" eingeführt, und zwar nach gewissen Aggregaten, die Gauß Determinanten der quadratischen Form genannt hat. Später allerdings hat Cauchy den Namen Determinante wieder mit „fonction alternée" vertauscht, während Laplace den Namen Resultante gebrauchte, jedenfalls durch Bézouts Ausdruck „équation résultante" veranlaßt.

Carl Gustav Jacob Jacobi schließlich kommt das Verdienst zu, die Determinanten dem allgemeinen mathematischen Publikum zugänglich gemacht zu haben, oder, wie sich Kronecker ausdrückt, den Determinanten das Bürgerrecht erworben zu haben. Er hat die erste Cauchysche Bezeichnung Determinante wieder eingeführt und seitdem ist dieselbe ganz allgemein.

Jacobi hatte sich bereits seit 1826 mit dem Studium der Determinanten eingehend beschäftigt und ließ als Ergebnis seiner Forschungen 1841 die eingangs erwähnte Schrift „Über die Bildung und die Eigenschaften der Determinanten" (De formatione et proprietatibus determinantium) erscheinen, die auch heute noch von außerordentlichem Wert ist.

Einen Überblick über die nach Jacobi folgende Entwicklung der Determinantenlehre gibt das angeführte Literaturverzeichnis. Daraus mag besonders das Kroneckersche Werk hervorgehoben werden. Kronecker ist nämlich der einzige Mathematiker, der einen ganz eigenen, aber gar nicht fernliegenden Weg einschlägt; er begründet die Determinantentheorie auf Untersuchungen der linearen Gleichungen oder allgemein der linearen Funktionen mehrerer Variablen.

Am Schluß dieser historischen Entwicklung muß noch auf einen Punkt hingewiesen werden, der die Bedeutung der Determinanten von einer anderen Seite beleuchtet und der zeigt, daß heutzutage die Stellung der Determinantentheorie in der Gesamtwissenschaft weit hinaus geht über den Zweck, der sie einst entstehen ließ.

Die Engländer (Cayley) haben versucht, bestimmte Eigenschaften, die für die Determinanten wesentlich sind, auch bei anderen Größen aufzufinden, und es ist ihnen geglückt, ein großes Gebiet gewisser algebraischer Größen mit gemeinsamen charakteristischen Eigenschaften zu entdecken, von dem die Determinanten eine Unterabteilung bilden. Durch diese Verallgemeinerung wurde die Theorie der Invarianten (Sylvester) oder Hyperdeterminanten (Cayley) begründet, auf welche natürlich in diesem Buch nicht eingegangen werden kann.

Den Schluß dieser geschichtlichen Erörterungen mag ein Ausspruch Sylvesters bilden:

„Was ist im Grunde genommen die Theorie der Determinanten? Es ist eine über der Algebra stehende Algebra, ein Rechnungsverfahren, welches uns in den Stand setzt, die Resultate der algebraischen Operationen zu kombinieren und dieselben vorauszusagen, ähnlich wie wir uns mit Hilfe der Algebra der Ausführung der besonderen Operationen der Arithmetik entheben können!“

§ 3. **Exkurs in das Gebiet der Kombinatorik.**

Die Determinanten gehören in dem großen Reiche der Mathematik in das Gebiet der Kombinatorik. Hat man sich im Anfang des 18. Jahrhunderts die glänzendsten Hoffnungen gemacht, so weiß man heute, daß sich die Mathematiker jener Zeit in diesem Punkte getäuscht

haben; nur der besondere Zweig der Determinanten hat sich in überraschender Weise entwickelt.

Da die Grundanschauungen der Kombinatorik in der Determinantentheorie eine wichtige Rolle spielen werden, mögen sie zur Erleichterung des Verständnisses für die kommenden Betrachtungen zuvor behandelt werden.

Die Kombinatorik behandelt die Gesetze, nach denen eine gewisse Anzahl Elemente sich zusammenstellen lassen, oder nach denen aus gegebenen Elementen Gruppen oder Komplexionen gebildet werden können.

Dabei versteht man unter Elementen Einzeldinge, auf deren Beschaffenheit oder Zahlenwert es im allgemeinen nicht ankommt, deren „kombinatorischer Wert" in der Rangordnung des Elementes unter den anderen besteht; man deutet diese Rangordnung durch einen Index (Stellenzeiger, Ordnungszahl) am Element an, der also dem Element in der Reihenfolge aller Elemente einen festen Platz zuweist. Hiernach ist es begreiflich, daß man symbolisch eine Komplexion, z. B. die Reihenfolge der n Elemente

$$a_1 \; a_2 \; a_3 \; \ldots \; a_n ,$$

durch die Indizes allein darstellen kann:

$$(1, 2, 3, \ldots, n) .$$

Eine bestimmte Anzahl (n) Elemente permutieren heißt, dieselben in alle möglichen Reihenfolgen (Anordnungen) bringen; irgend eine dieser verschiedenen Anordnungen nennt man eine Permutation der betreffenden (n) Elemente.

Die Hauptaufgabe besteht darin, die Gesamtzahl (P_n) aller möglichen Permutationen von einer bestimmten Anzahl (n) Elemente festzustellen.

Von n Elementen gibt es offenbar n mal so viele Permutationen, als es von $n-1$ Elementen gibt; denn zu dem ersten, zweiten, dritten, ... n-ten Element kann jede Permutation der $n-1$ übrigen Elemente gesetzt werden. Gibt es also zu $n-1$ Elementen eine bestimmte Anzahl Permutationen, die durch P_{n-1} bezeichnet sei, so muß es zu n Elementen n mal so viel, also $n \cdot P_{n-1}$ Permutationen geben. Nun können zwei Elemente a_1 und a_2 nur in den beiden Anordnungen $a_1 a_2$ und $a_2 a_1$ auftreten, das besagt $P_2 = 2$. P_3 findet man zu

$$P_3 = 3 \cdot P_2 = 2 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3!\,,$$

$$P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4!\,.$$

Also ist allgemein

$$P_n = n \cdot (n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \;\ldots\; \cdot n = n!\,.$$

Hat man z. B. die Permutationen von

1 2 3 4

zu bilden, so schreibt man erst alle diejenigen hin, welche mit 1 beginnen, das heißt man schreibt zu 1 die Permutationen von 2, 3, 4:

1	2	3	4
1	2	4	3
1	3	2	4
1	3	4	2
1	4	2	3
1	4	3	2

Ebenso schreibt man dann alle Permutationen hin, die 2, ferner die 3 und schließlich die 4 zuerst stehen haben.

Eine besondere Art von Komplexionen erhält man, wenn aus der Reihe der gegebenen n Elemente auf alle mögliche Weise je k herausgegriffen und permutiert werden. Diese Art Komplexionen heißen Variationen der n Elemente zur k-ten Klasse. Im besonderen gibt es n Variationen der n Elemente zur ersten Klasse, und es fallen andererseits die Variationen der n Elemente zur n-ten Klasse mit den Permutationen der n Elemente zusammen, während Variationen von n Elementen zur $(n+1)$-ten und zu höheren Klassen nicht gebildet werden können, ohne daß einzelne Elemente wiederkehren, was für die kommenden Betrachtungen ausgeschlossen werden soll.

Es gibt von n Elementen

$$V_k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$$

Variationen der k-ten Klasse.

Will man nämlich aus den Variationen der k-ten Klasse diejenigen der $(k+1)$-ten Klasse bilden, so muß man zu jeder Variation der k-ten Klasse das Element setzen, das sie noch nicht aufweist; da gibt es für jede Variation $(n-k)$ Möglichkeiten. Somit erhält man $(n-k)$ mal so viel Variationen $(k+1)$-ter als k-ter Klasse. Oben wurde erwähnt, daß es n Variationen erster Klasse gibt; daraus folgt, daß es $n(n-1)$ solche zweiter Klasse, $n(n-1)(n-2)$ solche dritter Klasse, allgemein, daß es $n(n-1)\ldots(n-k+1)$ solche k-ter Klasse gibt.

Alle Variationen der k-ten Klasse können derart in Gruppen geteilt werden, daß die Komplexionen in jeder Gruppe Permutationen derselben k Elemente sind. Kommt es nun lediglich darauf an, die Anzahl dieser Gruppen festzustellen, so nennt man die einzelnen Gruppen Kombinationen der n Elemente zur k-ten Klasse. Es

gehören zu jeder Gruppe $k!$ Variationen, woraus folgt, daß die Zahl der Kombinationen zur k-ten Klasse nur den $k!$-ten Teil der Anzahl der Variationen zur k-ten Klasse beträgt:

$$K_k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} = \binom{n}{k}$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}$$

$$\cdot \frac{(n-k)(n-k-1) \cdot \ldots \cdot (k+1)}{(k+1)(k+2) \cdot \ldots \cdot (n-k)} = \binom{n}{n-k}.$$

Jetzt ist auch:

$$V_k = \binom{n}{k} \cdot k!$$

Oben wurde bereits gezeigt, wie man verfahren muß, wenn man alle $n!$ Permutationen von n Elementen aufstellen will. Dasselbe soll jetzt noch einmal vorgenommen werden, jedoch in ganz anderer Weise, weil diese Form der Ableitung für das Spätere von Wichtigkeit ist.

Es sollen alle $n!$ Permutationen von den vorgelegten n Elementen für den Fall gebildet werden, daß die n Elemente immer in r Gruppen geteilt bleiben, von denen die erste m_1, die zweite m_2 usw., die r-te Gruppe m_r Elemente enthalten, wobei

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_r = n\,.$$

Für den Fall

$$n = m_1 + m_2$$

erhält man alle $n!$ Permutationen, wenn man sich erst alle Variationen der n Elemente zur m_1-ten Klasse bildet, das sind

$$V_k = m_1! \cdot \binom{n}{m_1}.$$

An jede dieser Komplexionen müssen die $n - m_1 = m_2$ fehlenden Elemente gesetzt werden; das ist $m_2!$-mal möglich, weil es $m_2!$ Umstellungen der m_2 Elemente gibt. Somit muß sein:

$$n! = V_k \cdot m_2! = m_1! \cdot m_2! \cdot \binom{n}{m_1}.$$

In der Tat ist

$$m_1! \cdot m_2! \cdot \binom{n}{m_1} = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m_1+1)}{m_1!} \cdot m_1! \cdot m_2!$$
$$= n(n-1) \cdot \ldots \cdot (m_2+1) \cdot m_2! = n!.$$

Ist ferner:

$$n = m_1 + m_2 + m_3,$$

so schreibt man:

$$n = m_1 + (m_2 + m_3),$$

woraus folgt:

$$n! = m_1! \cdot (m_2 + m_3)! \cdot \binom{n}{m_1}.$$

Nun ist:

$$(m_2+m_3)! = m_2! \cdot (m_2+1)(m_2+2) \ldots (m_2+m_3) \cdot \frac{m_3!}{m_3!}$$
$$= m_2!\, m_3!\, \frac{(m_2+m_3)(m_2+m_3-1) \ldots (m_2+2)(m_2+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (m_3-1) \cdot m_3}$$
$$= m_2!\, m_3! \binom{m_2+m_3}{m_3}$$
$$= m_2!\, m_3! \binom{m_2+m_3}{m_2} \qquad \left[\text{weil} \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}\right]$$
$$= m_2!\, m_3! \binom{n-m_1}{m_2} \qquad (\text{weil } m_2+m_3 = n-m_1).$$

Somit wird:

$$n! = m_1! \cdot m_2! \cdot m_3! \cdot \binom{n}{m_1}\binom{n-m_1}{m_2}\binom{n-m_1-m_2}{m_3}.$$

Der Faktor $\binom{n - m_1 - m_2}{m_3} = \binom{m_3}{m_3} = 1$ ist nur der Übersichtlichkeit wegen beigefügt.

Man erkennt nunmehr ohne weiteres, daß für

$$n = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$$

würde:

$$n! = m_1! \cdot m_2! \cdot m_3! \cdot m_4!$$

$$\cdot \binom{n}{m_1}\binom{n - m_1}{m_2}\binom{n - m_1 - m_2}{m_3}\binom{n - m_1 - m_2 - m_3}{m_4}$$

und allgemein für:

$$n = m_1 + m_2 + \ldots + m_r$$

$$n! = m_1! \, m_2! \ldots m_r!$$

$$\cdot \binom{n}{m_1}\binom{n-m_1}{m_2}\binom{n-m_1-m_2}{m_3}\ldots\binom{n-m_1-\ldots-m_{r-1}}{m_r}.$$

Die hieraus folgende Formel

$$\binom{n}{m_1}\binom{n - m_1}{m_2}\ldots\binom{n - m_1 - \ldots - m_{r-1}}{m_r} = \frac{n!}{m_1! \, m_2! \ldots m_r!}$$

gibt zugleich die Anzahl Permutationen von n Elementen an, wenn unter n Elementen $m_1, m_2, \ldots, m_r$ gleiche Elemente sind, falls $m_1 + m_2 + \ldots + m_r = n$; das ist dieselbe Zahl, die angibt, wievielmal aus n Elementen r Gruppen von je $m_1, m_2, \ldots, m_r$ Elementen ohne Rücksicht auf die verschiedenen Anordnungen der Elemente in den einzelnen Gruppen herausgegriffen werden können.

Während bisher die allgemeinen Grundaufgaben über die Bestimmung der Anzahl der verschiedenen Komplexionen von n Elementen behandelt wurden, sollen jetzt die einzelnen Permutationen betrachtet werden, im besonderen wie man von einer zur anderen gelangt.

Diejenige Permutation, welche durch die Aufeinanderfolge der Indizes in der natürlichen Zahlenreihe ausgezeichnet ist, mag als Grundpermutation bezeichnet werden. In dieser ist jedes vorausgehende Element von niederer Ordnung als das folgende. Nimmt man mit der Grundpermutation $(1, 2, \ldots, n)$ irgend eine Veränderung der Anordnung der Elemente vor, so sagt man, zwei Elemente bilden in der neuen Permutation eine Inversion (dérangement, Fehlstand, Versetzung), wenn sie in der umgekehrten Ordnung wie in der Grundpermutation aufeinander folgen, oder wenn von den beiden Elementen dasjenige niederer Ordnung dem höherer Ordnung nachsteht. Unter $(n, n-1, \ldots, 2, 1)$ versteht man die sogenannte inverse Permutation.

Irgend eine Permutation wird bezüglich der Grundpermutation eine ganz bestimmte Anzahl Inversionen bilden. Man findet diese Anzahl, wenn man jedes Element mit allen vorhergehenden vergleicht und abzählt, wievielmal ein Element niederer Ordnung einem solchen höherer Ordnung nachsteht. So enthält die Permutation (2, 5, 4, 1, 3) die Inversionen: (2, 1), (5, 4), (5, 1), (5, 3), (4, 1), (4, 3), also im ganzen sechs.

Die inverse Permutation weist die größtmögliche Anzahl Inversionen auf, nämlich $\frac{n}{2}(n-1)$, weil jedes folgende Element von niederer Ordnung ist als das vorhergehende.

Bei größeren Komplexionen kann man die Abzählung der Inversionen erleichtern, falls man die betreffende

Komplexion in zwei beliebige Gruppen spaltet. Die gesuchte Anzahl ist dann gleich der Summe der Inversionen der ersten Gruppe und der der zweiten Gruppe, die sich beide nach Obigem leicht finden lassen, vermehrt um die Anzahl der Inversionen, welche die Elemente der ersten Gruppe mit denen der zweiten bilden. Bei Bestimmung der letzten Anzahl kommt es nicht darauf an, wie die Elemente in den Gruppen selbst angeordnet sind. Es seien daher von den n überhaupt vorliegenden Elementen m in der ersten Gruppe, also $(n - m)$ in der zweiten Gruppe; die ersteren haben folgende der Größe nach geordnete Indizes:

$$i_1, i_2, \ldots, i_r, \ldots, i_{m-1}, i_m.$$

Es kann nun z. B. i_r nur mit kleineren Zahlen Inversionen bilden; solche sind im ganzen $(i_r - 1)$ vorhanden, wovon jedoch diejenigen abzuziehen sind, welche in der ersten Gruppe vorkommen, also $(r - 1)$. Hiernach kann i_r mit den Indizes der zweiten Gruppe nur $i_r - r$ Inversionen bilden. Eine solche Zahl kommt aber jedem Element in der ersten Gruppe zu, so daß folgende Summe die gesuchte Zahl angibt:

$$(i_1 - 1) + (i_2 - 2) + \ldots + (i_r - r) + \ldots + (i_m - m)$$
$$= i_1 + i_2 + \ldots + i_r + \ldots + i_m - (1 + 2 + \ldots + r + \ldots + m)$$
$$= i_1 + i_2 + \ldots + i_m - \frac{m}{2}(m + 1).$$

Sämtliche $n!$ Permutationen von n Elementen werden in zwei Klassen eingeteilt; je nachdem irgend eine Permutation bezüglich der Grundpermutation eine gerade oder ungerade Anzahl Inversionen aufweist, gehört sie in die gerade (erste, positive) oder in die ungerade (zweite, negative) Klasse.

Vertauscht man in einer Permutation zwei beliebige Elemente, führt man also eine „Transposition“ aus, wie man sich ausdrückt, so ändert sich die Anzahl der Inversionen um eine ungerade Anzahl, oder mit anderen Worten, so ändert die Permutation ihre Klasse. Dies erklärt sich daraus, daß man die Vertauschung zweier beliebiger Elemente stets auf eine ungerade Anzahl von Vertauschungen zweier Nachbarelemente zurückführen kann, was durch folgendes Beispiel erläutert werden mag. Um von (1, 2, 3, 4, 5, 6) auf (1, 6, 3, 4, 5, 2) zu gelangen, müssen die sieben Nachbarvertauschungen der Reihe nach ausgeführt werden: (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (6, 5), (6, 4), (6, 3), wobei jeder einzelnen Vertauschung eine Änderung der Inversionszahl von 1 entspricht.

Überhaupt kann durch Vertauschung benachbarter Elemente nach und nach jede beliebige Permutation aus der Grundpermutation abgeleitet werden, woraus wieder folgt, daß jede Permutation aus jeder anderen durch Vertauschung benachbarter Elemente abgeleitet werden kann.

Allgemein bezeichnet man die Operation des Übergangs von einer Permutation der gegebenen Elemente zu einer anderen Permutation derselben Elemente als Substitution. Als einfachste Substitution dürfte demnach die Transposition benachbarter Elemente zu bezeichnen sein. Mit Hilfe dieses neuen Begriffes verstehen sich die folgenden Sätze von selbst:

Jede Substitution ist in Transpositionen zerlegbar.

Irgend eine Permutation behält bei Ausführung einer beliebigen Substitution ihre Klasse bei oder wechselt dieselbe, je nachdem die Substitution sich in eine gerade oder ungerade Anzahl von Transpositionen zerlegen läßt.

Die Anzahl der Permutationen der ersten Klasse ist ebenso groß als die der zweiten Klasse.

Letzteres erklärt sich daraus, daß die Anzahl aller Permutationen ($n!$) gerade ist, und daß bei der Entstehung aller Permutationen aus der Grundpermutation einmal eine der ersten Art, dann wieder eine der zweiten Art entsteht.

Ebenso erklärt sich von selbst:

Zwei Permutationen gehören zu derselben Klasse, wenn sich die eine aus der anderen durch eine gerade Anzahl von Transpositionen gewinnen läßt, oder wenn beide je durch eine gerade oder je durch eine ungerade Anzahl von Transpositionen aus derselben dritten sich ableiten lassen.

Hervorgehoben werden müssen schließlich noch die zyklischen Vertauschungen, denn eine Substitution kann auch dadurch ausgeführt werden, daß jedes Element durch das folgende und das letzte wieder durch das erste ersetzt wird, oder daß jedes Element durch das vorhergehende und das erste durch das letzte ersetzt wird.

Findet eine zyklische Vertauschung aller Elemente statt, so weist die Substitution eine gerade oder ungerade Anzahl von Inversionen auf, je nachdem die Anzahl der Elemente ungerade oder gerade ist, da sich immer eine zyklische Vertauschung von n Elementen durch ($n - 1$) Transpositionen ersetzen läßt, wie folgendes Beispiel zeigt:

1, 2, 3, 4, 5, 6;
(12)
2, 1, 3, 4, 5, 6;
(13)
2, 3, 1, 4, 5, 6;
(14)
2, 3, 4, 1, 5, 6;
(15)
2, 3, 4, 5, 1, 6;
(16)
2, 3, 4, 5, 6, 1.

Es läßt sich aber auch jede beliebige Substitution auf zyklische Vertauschungen einzelner Gruppen zurückführen; hierfür ein Beispiel:

Soll z. B. die Permutation

$$P_1 = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$$

übergeführt werden in

$$P_2 = (3, 6, 4, 1, 7, 2, 8, 5),$$

so ersetze man in P_1 irgend ein Element, z. B. 3, durch dasjenige, welches in P_2 an dieser Stelle steht, also durch 4. Darauf lasse man an die Stelle, wo 4 in P_1 steht, dasjenige rücken, das in P_2 an der Stelle von 4 in P_1 steht, also 1. An Stelle von 1 in P_1 kommt dann 3 und dann wieder 4 an Stelle von 3. Damit ist ein Zyklus (3, 4, 1) erkennbar. Darauf verfährt man genau so mit einem neuen Element, bis man wieder einen Zyklus erkennt· usw. In dem angeführten Beispiel wird leicht noch der Zykel, wie man sich auch ausdrückt, (2, 6) und ebenfalls (7, 8, 5) erkannt.

Kommt man mit einem einzigen Zyklus aus, so nennt man die Substitution zirkular. Hiernach ist jede Substitution in zirkulare Substitutionen einzelner Elementengruppen zerlegbar, und eine Transposition ist eine zirkulare Substitution zweier Elemente. Ferner fällt die Zerlegung einer Substitution in Transpositionen zusammen mit der eben angeführten Zerlegung der Substitutionen in Zykeln.

Eine Substitution ist weiterhin gerade oder ungerade, je nachdem die Differenz der Elementenanzahl der Permutation und der Anzahl der Gruppen von Zykeln gerade oder ungerade ist. Da nämlich ein Zyklus von m Elementen durch $(m - 1)$ Transpositionen ersetzbar ist, so hat man bei r Gruppen von Zykeln $m_1 - 1 + m_2 - 1 + \ldots + m_r - 1 = n - r$ Transpositionen, deren Anzahl sofort die eine oder andere Gruppe erkennen läßt.

§ 4. Bezeichnungsweise durch doppelte Indizes.

„Es ist in der Algebra und in der Analysis keineswegs gleichgültig, welche Bezeichnungen man für diejenigen Größen wählt, mit welchen man operieren will. Sie sollen die Größen irgendwie charakterisieren. Auch in der Bezeichnung der Operationen, welche mit den gegebenen Größen vorgenommen werden sollen, macht sich eine große Kunst bemerkbar, die wir von unseren Vorfahren ererbt und dann weitergebildet haben. Es ist gewiß nicht zu viel gesagt, wenn man behauptet, daß die Lösung einer großen Zahl von Problemen einzig und allein von der geeigneten Wahl der Bezeichnungen abhängt.“

Dieser Ausspruch rührt von Hesse her; man erkennt danach, weshalb in § 1 die gegebenen Größen der linearen Gleichungen nicht willkürlich bezeichnet wurden. Hätte man z. B. die drei linearen Gleichungen in folgender Weise bezeichnet:

$$ax + by + cz = d\,,$$

$$ex + fy + gz = h\,,$$

$$ix + ky + lz = m\,,$$

so würde sich die Rechnung keineswegs so übersichtlich gestaltet haben. Dies gilt natürlich von noch mehr Gleichungen erst recht, denn da steigern sich die Schwierigkeiten bei unpassender Bezeichnung ganz beträchtlich.

Die Übersichtlichkeit der Bezeichnung in § 1 besteht nun darin, daß der Index des Koeffizienten die Gleichung angibt, während der Buchstabe die Stellung der Konstanten in der Gleichung bezeichnet; so ist z. B. b_3 der Koeffizient von y in der dritten Gleichung, da die b

immer Koeffizienten von y sind, während die a solche von x sind usw.

Aber diese Bezeichnungsweise hat doch ihre Mängel, falls mehr als drei Unbekannte mit den dazugehörigen Gleichungen vorhanden sind; bald muß eine Unsymmetrie in der Bezeichnung eintreten, da die Anzahl der Buchstaben eine beschränkte ist und man nicht jede beliebige Anzahl von Gleichungen in dieser Weise bezeichnen kann. Außerdem ist man mit der Reihenfolge der Buchstaben doch keineswegs so vertraut wie mit der natürlichen Zahlenreihe.

Wurde oben bereits die Reihenfolge der Gleichungen durch Zahlen (Indizes) charakterisiert, so wollen wir noch einen Schritt weitergehen und nicht nur die Gleichungen zählen, sondern auch die Unbekannten. Man läßt dabei den Buchstaben x für die Unbekannten übrig, die dann z. B. heißen $x_1, x_2, \ldots, x_n$; aber auch die Koeffizienten der Unbekannten werden alle durch einen Buchstaben ausgedrückt, meistens durch a, und zwar derart, daß ein erster Index an a angeben soll, in welcher Gleichung derselbe als Koeffizient vorkommt, und daß ein zweiter danebenstehender Index die Unbekannte markiert, deren Koeffizient er ist. Demzufolge wird a_{47} den Koeffizienten in der vierten Gleichung von x_7 darstellen und a_{nn} den in der n-ten Gleichung von x_n, falls n lineare Gleichungen mit n Unbekannten vorliegen.

Zur weiteren Erläuterung dieser Bezeichnungsweise, die zuerst von Leibniz angewendet wurde (er schrieb allerdings nur die Indizes hin und hob immer wieder hervor, daß es keine Zahlen seien), die aber schon früher die Araber gekannt haben sollen, mag das füher durchgeführte Beispiel (A) zum Teil in der neuen Schreibweise angegeben werden:

$$a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 = m_1\,,$$
$$a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 = m_2\,,$$
$$a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 = m_3\,,$$

$$x_1 = \frac{\begin{array}{c} m_1\,a_{22}\,a_{33} - m_1\,a_{32}\,a_{23} + m_2\,a_{32}\,a_{13} \\ - m_2\,a_{12}\,a_{33} + m_3\,a_{12}\,a_{23} - m_3\,a_{22}\,a_{13} \end{array}}{\begin{array}{c} a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}\,a_{32}\,a_{23} + a_{21}\,a_{32}\,a_{13} \\ - a_{21}\,a_{12}\,a_{33} + a_{31}\,a_{12}\,a_{23} - a_{31}\,a_{22}\,a_{13} \end{array}}\,.$$

Analog x_2 und x_3 .

Obwohl die neue Bezeichnungsweise zunächst umständlicher aussieht als die frühere, werden die folgenden Untersuchungen ihre Notwendigkeit bald hervortreten lassen.

Viele Schriftsteller, z. B. Jacobi und Hesse, setzen den zweiten Index zur besseren Unterscheidung rechts oben an den Buchstaben, wobei natürlich stets zu beachten ist, daß man es nicht mit Potenzen zu tun hat. Dem Produkt $a_{11}\,a_{22}\,a_{33}$ würde da entsprechen $a_1^1\,a_2^2\,a_3^3$.

II. Theorie der Determinanten.

§ 5. Definition der Determinanten.

Denkt man sich n^2 Größen gegeben, so kann man sie stets in folgendem Schema anordnen:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{array}\right\}.$$

Die einzelnen Größen mögen in Zukunft die Elemente des Schemas genannt werden; es sollen ferner die hintereinanderstehenden Elemente als solche derselben Horizontalreihe oder Zeile bezeichnet werden und die untereinanderstehenden als solche derselben Vertikalreihe oder Kolonne. Zeilen und Kolonnen zusammen gibt man auch den gemeinsamen Namen Parallelreihen.

Aus dem Schema geht ohne weiteres hervor, daß die ersten Indizes angeben, in welcher Zeile jedes Element steht, und daß die zweiten Indizes die Kolonne des Elementes im Schema bezeichnen. Somit gehört das Element a_{ik} der i-ten Zeile und der k-ten Kolonne an; umgekehrt müssen sich die i-te Zeile und die k-te Kolonne im Element a_{ik} kreuzen. Von den Elementen

$$a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{n-1,n-1}, a_{nn}$$

sagt man, daß sie der Hauptdiagonale des Schemas angehören, während die Elemente

$$a_{1n}, a_{2,n-1}, a_{3,n-2}, \ldots, a_{n-1,2}, a_{n1}$$

die Nebendiagonale bilden.

Aus den Elementen des obigen Schemas sollen nun alle möglichen Produkte in der Weise gebildet werden, daß von jeder Zeile und von jeder Kolonne zu jedem Produkt nur ein Element genommen wird, so daß lauter Produkte mit n Faktoren entstehen. So nehme man z. B. aus der ersten Zeile a_{1i_1}, aus der zweiten Zeile a_{2i_2}, aus der dritten a_{3i_3} und so weiter, schließlich aus der n-ten Zeile a_{ni_n}. Dabei sollen die Zahlen $i_1, i_2, \ldots, i_n$ nur andeuten, daß aus jeder Zeile ein ganz beliebiges Element genommen werden kann, nur jedesmal ein solches einer anderen Kolonne; es müssen also die Zahlen $i_1, i_2, \ldots, i_n$

dieselben Zahlen wie 1, 2, 3, ..., n sein, aber in einer beliebigen Reihenfolge.

Man wird offenbar so viele Produkte bilden können, als man die Zahlen von 1 bis n in anderer Reihenfolge hinschreiben kann, oder mit anderen Worten, sooft man n Zahlen permutieren kann. Somit gibt es $n!$ solche Produkte.

Der einfacheren Schreibweise wegen geht man nicht von dem beliebigen Produkt

$$a_{1i_1}\ a_{2i_2}\ \dots\ a_{ni_n}$$

aus, sondern von

$$a_{11}\ a_{22}\ \dots\ a_{nn}$$

und permutiert die zweiten Indizes; dieses Produkt der Hauptdiagonalelemente nennt man das Hauptglied.

Jedes Produkt soll positiv oder negativ genommen werden, je nachdem die Permutation der zweiten Indizes bezüglich der festgesetzten Grundpermutation $(1, 2, \dots, n)$ der ersten (positiven) oder der zweiten (negativen) Permutationsklasse angehört. So wird z. B. das Glied $a_{12}\,a_{21}\,a_{33}\,a_{44}\dots a_{nn}$ das negative Vorzeichen erhalten müssen, denn die Permutation $(2, 1, 3, 4, \dots, n)$ geht aus der Grundpermutation durch eine Transposition hervor. Andererseits wird das Nebendiagonalglied $a_{1n}a_{2,n-1}\dots a_{n1}$ nach den früheren Betrachtungen über die inverse Permutation das Vorzeichen von $(-1)^{\frac{n}{2}(n-1)}$ erhalten. Dann wurde früher schon festgestellt, daß es ebensoviel Permutationen der ersten als der zweiten Klasse gibt, woraus folgt, daß von den $n!$ Produkten die eine Hälfte positiv, die andere Hälfte negativ ist.

Unter der n-gliedrigen Determinante D der im obigen Schema n^2 enthaltenen Größen versteht man nun

die Summe der eben näher angegebenen $n!$ Produkte; man findet auch die Bezeichnung n-reihige Determinante, oder Determinante n-ten Grades bzw. n-ter Ordnung.

Nach Cauchy bezeichnet man diese Determinante dadurch, daß man die im obigen Schema enthaltenen n^2 Größen a in derselben Weise hinschreibt, aber zwischen zwei vertikale Striche setzt, wodurch ein für allemal angedeutet sein soll, daß von den darin enthaltenen n^2 Größen jene Summe von den mit den richtigen Vorzeichen genommenen $n!$ Produkten aus je n Größen gebildet werden soll:

$$\text{(I)} \qquad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

In älteren Werken findet man noch die Vandermondesche Darstellung:

$$\text{(II)} \qquad D = \frac{1\,|\,2\,|\,3\,|\dots|\,n-1\,|\,n}{1\,|\,2\,|\,3\,|\dots|\,n-1\,|\,n}.$$

Noch einfacher ist folgende Darstellung, die der letzten ähnlich ist:

$$\text{(III)} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Jacobi führte (ebenfalls nach Cauchy) folgende Bezeichnungsweise von D ein, um das Entstehen der Summe

der zur Hälfte positiven, zur Hälfte negativen $n!$ Glieder aus dem Hauptgliede anzudeuten:

(IV) $$D = \Sigma \pm a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}\,.$$

Noch kürzer schrieb Kronecker:

(V) $$D = | a_{ik} | \quad (\text{wo } i \text{ und } k = 1, 2, 3, \ldots, n)\,.$$

Die Bezeichnungen (II) bis (V) sind natürlich nur Abkürzungen; sind die n^2 Elemente wirklich durch einzelne Werte gegeben, so kann nur die Schreibweise (I) in Betracht kommen.

Der oben gegebenen Vorschrift zur Bildung oder, wie künftig gesagt werden soll, zur Entwicklung der Determinante, nämlich aus jeder Zeile und Kolonne nur ein Element zur Bildung eines Gliedes zu nehmen, wird offenbar ebenso entsprochen, wenn man dort nicht aus der ersten Zeile $a_{1 i_1}$, sondern aus der ersten Kolonne ein beliebiges Element, z. B. $a_{j_1 1}$, aus der zweiten Zeile nicht $a_{2 i_2}$, sondern aus der zweiten Kolonne $a_{j_2 2}$ usw., aus der letzten Zeile nicht $a_{n i_n}$, sondern aus der letzten Kolonne $a_{j_n n}$ herausgreift, wobei die Indizes $j_1, j_2, \ldots, j_n$ wieder die Zahlen $1, 2, \ldots, n$, nur in anderer Reihenfolge, sein sollen, und von diesen n Elementen das Produkt bildet:

$$a_{j_1 1}\; a_{j_1 2} \;\ldots\; a_{j_n n}\,.$$

Hieraus erhält man ebenfalls alle obigen $n!$ Produkte und zwar dadurch, daß man alle Permutationen der ersten Indizes bildet.

Diese zweite Bildungsmöglichkeit der $n!$ Produkte folgt auch daraus, daß man jedes Glied der auf die erste Weise erhaltenen Entwicklung durch Umstellung der Faktoren so schreiben kann, daß nicht die ersten, sondern

die zweiten Indizes in der natürlichen Zahlenreihe auftreten; es werden dann eben die ersten Indizes die $n!$ Permutationen der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$ darstellen.

Unter Berücksichtigung dieser letzten Betrachtungen kann nunmehr folgendes

Bildungsgesetz der Determinante n-ter Ordnung

aufgestellt werden:

Die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

wird dadurch gebildet, daß in dem Hauptglied $a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$ die ersten oder die zweiten Indizes auf alle möglichen Arten permutiert werden. Jedem der so entstandenen Produkte wird das positive oder das negative Vorzeichen gegeben, je nachdem die zugehörige Permutation der Indizes zur selben Permutationsklasse gehört wie $(1, 2, \ldots, n)$ oder nicht. Die Summe aller dieser Glieder ist die obige Determinante D.

Einige Beispiele mögen das eben entwickelte Bildungsgesetz erläutern.

Zweigliedrige Determinanten.

Zwei Elemente lassen nur zwei Permutationen zu; ist also

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

so geben z. B. die ersten Indizes im Hauptglied $a_{11} a_{22}$ die zwei Permutationen $(1, 2)$ und $(2, 1)$, wobei die erste natür-

lich bereits durch das Hauptglied dargestellt wird; ebenso können auch die zweiten Indizes permutiert werden, so daß

$$D = a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12} \equiv a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}\,.$$

Hiernach ist:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1\,b_2 - a_2\,b_1 \equiv a_1\,b_2 - b_1\,a_2\,,$$

wobei einmal die Indizes, dann die Buchstaben permutiert wurden.

Zahlenbeispiel:

$$\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 - (-14) = 29\,.$$

Dreigliedrige Determinanten.

Drei Elemente lassen $3! = 6$ Permutationen zu, nämlich:

(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 3, 1), (2, 1, 3), (3, 1, 2), (3, 2, 1),

so daß, einmal die zweiten, dann die ersten Indizes permutiert, sein wird:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} \\ & - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} \end{aligned}$$

$$\equiv \begin{aligned} & a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}\,a_{32}\,a_{23} + a_{21}\,a_{32}\,a_{13} \\ & - a_{21}\,a_{12}\,a_{33} + a_{31}\,a_{12}\,a_{23} - a_{31}\,a_{22}\,a_{13}\,. \end{aligned}$$

Diese Entwicklung schreibt man oft auch so, daß man aus je zwei Gliedern Elemente derselben Parallelreihe ausklammert, z. B.

$$a_{11}(a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32}) + a_{12}(a_{23}\,a_{31} - a_{21}\,a_{33}) + a_{13}(a_{21}\,a_{32} - a_{22}\,a_{31})$$

$$\equiv a_{12}(a_{23}\,a_{31} - a_{21}\,a_{33}) + a_{22}(\ldots) + a_{32}(\ldots)$$

$$\equiv a_{13}(\ldots) + a_{23}(\ldots) + a_{33}(\ldots)\,.$$

Man erkennt leicht, daß man die Klammern wieder als Determinanten schreiben könnte, z. B.:

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} .$$

Nach Jacobi könnte man dieselbe Determinante auch schreiben:

$$\Sigma \pm a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \equiv -\Sigma \pm a_{11}\, a_{23}\, a_{32} \equiv \Sigma \pm a_{12}\, a_{23}\, a_{31}$$
$$\equiv -\Sigma \pm a_{12}\, a_{21}\, a_{33} \equiv \Sigma \pm a_{13}\, a_{21}\, a_{32} \equiv -\Sigma \pm a_{13}\, a_{22}\, a_{31} .$$

Ist gegeben

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} ,$$

so kann man entweder die Zahlen oder die Buchstaben permutieren:

$$a_1\, b_2\, c_3 - a_1\, b_3\, c_2 + a_2\, b_3\, c_1 - a_2\, b_1\, c_3 + a_3\, b_1\, c_2 - a_3\, b_2\, c_1$$
$$\equiv a_1\, b_2\, c_3 - a_1\, c_2\, b_3 + b_1\, c_2\, a_3 - b_1\, a_2\, c_3 + c_1\, a_2\, b_3 - c_1\, b_2\, a_3 .$$

Hiernach lassen sich die Lösungen von (A) in § 1 schreiben:

$$x = \begin{vmatrix} m_1 & b_1 & c_1 \\ m_2 & b_2 & c_2 \\ m_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{analog } y \text{ und } z .$$

Für die Entwicklung der dreigliedrigen Determinante hat Sarrus eine Regel angegeben, die aus folgendem Schema ersichtlich ist:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix} .$$

Die Produkte aus den Elementen parallel der Hauptdiagonale (durch einfache Striche verbunden) geben die positiven

und die parallel der Nebendiagonale (durch Doppelstriche verbunden) die negativen Glieder der Determinante:

$$a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 \,.$$

Man schreibt also die beiden ersten Kolonnen noch einmal hinter die dritte; so findet man z. B.:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 8 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -46 \quad \text{aus} \quad \left| \begin{array}{ccc|cc} 3 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 2 & 4 \\ 8 & 0 & 1 & 8 & 0 \end{array} \right.$$

$$D = 3\cdot4\cdot1 + 1\cdot5\cdot8 + 3\cdot2\cdot0 - 3\cdot4\cdot8 - 3\cdot5\cdot0 - 1\cdot2\cdot1$$
$$= 12 + 40 - 96 - 2 = -46 \,.$$

Bei einiger Übung gelingt es einem bald, sich die beiden Kolonnen hinzuzudenken und sofort die Entwicklung hinzuschreiben:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= b c^2 + a b^2 + a^2 c - a^2 b - b^2 c - a c^2 \\ &= b c(c - b) + a b(b - a) + a c(a - c) \,. \end{aligned}$$

Es sei jedoch nochmals darauf hingewiesen, daß diese Entwicklung nur für dreigliedrige Determinanten gilt.

Die Entwicklung einer viergliedrigen Determinante weist offenbar 24 Glieder und eine solche fünfter Ordnung 120 Glieder auf; die wirkliche Bildung wird da schon einigermaßen umständlich. Es soll darauf noch einmal zurückgekommen werden.

Definition der Matrices.

Ist ein System von $m \cdot n$ Elementen a_{ik} vorgelegt, wo $i = 1, 2, \ldots, m$ und $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \,, \end{matrix}$$

so nennt man nach Cayley folgendes Gebilde:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

die Matrix der $m \cdot n$ vorgelegten Elemente. Man erhält natürlich eine größere Anzahl Zeilen als Kolonnen, oder umgekehrt eine größere Kolonnenzahl, je nachdem $m > n$ oder $m < n$. Vom Werte einer solchen Matrix kann man jedoch in dem bisherigen Sinne nicht reden, sondern man untersucht die Determinanten, welche eine solche Matrix (Mutterdeterminante) enthält. Man kann z. B. bei $m > n$ auf $\binom{m}{n}$ verschiedene Weise n Zeilen herausgreifen und damit $\binom{m}{n}$ verschiedene n-gliedrige Determinanten bilden:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} : \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Den Zusammenhang dieser $\binom{m}{n}$ Determinanten untereinander festzustellen, wird dann eine Aufgabe der Theorie der Matrizes sein, die Cayley stets von der Determinantentheorie getrennt wissen wollte.

Ist $m \neq n$, so spricht man von einer rechteckigen Matrix, während $m = n$ die quadratische Matrix, die Determinante liefert. In diesem Sinne sprechen manche Autoren in bezug auf das Schema

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

stets von der Matrix und rücksichtlich des dadurch festgesetzten Wertes von der Determinante der Matrix.

§ 6. Hauptsätze der Determinanten mit einigen Folgerungen.

Aus der doppelten Bildungsweise der Determinanten (Permutation der ersten oder der zweiten Indizes!) geht hervor, daß in der Entwicklung die ersten Indizes mit den zweiten vertauscht werden können. Die ersten Indizes charakterisieren die Zeilen und die zweiten die Kolonnen. Demnach bedeutet die eben erwähnte Vertauschbarkeit der ersten Indizes mit den zweiten nichts anderes als die Möglichkeit, in einer Determinante die Kolonnen mit den Zeilen vertauschen zu können. Diese Überlegung führt zu dem

1. Satz. Eine Determinante ändert ihren Wert nicht, wenn die Zeilen als Kolonnen und die Kolonnen als Zeilen geschrieben werden.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = a b' - a' b \,,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} \,,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{n3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

606

Bez. and. Beisp., auch d. folg. Sätze, vgl. „Nied. Analysis“ v. Sporer, Samml. Göschen, Bd. 53.

In den angeführten Determinanten sind die Hauptdiagonalen erhalten geblieben; dementsprechend hat man diese Umänderung einer Determinante als „Umklappen um die Hauptdiagonale“, auch als „Stürzen“ bezeichnet.

Nach dem Bildungsgesetz ist aus irgend einer Parallelreihe in jedem Produkt der Entwicklung stets ein Element vorhanden. Hieraus erklärt sich der

2. Satz. Eine Determinante ist ihrem Werte nach Null, falls die Elemente einer Parallelreihe alle verschwinden.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0 .$$

Wird in jeder der $n!$ Permutationen, welche die $n!$ Glieder der Determinante charakterisieren, eine bestimmte Zahl mit einer anderen ebenfalls bestimmten Zahl, also z. B. überall 5 mit 7, vertauscht, so können sich die $n!$ Permutationen in ihrer Gesamtheit nicht geändert haben, während jede einzelne Permutation die Klasse gewechselt haben muß. Einer Vertauschung zweier Zahlen (Indizes) kommt bei der Determinante eine Vertauschung zweier Parallelreihen gleich, und dem Klassenwechsel jeder Permutation entspricht ein Zeichenwechsel jedes Gliedes in der Entwicklung der Determinante. Daraus folgt der

3. Satz. Eine Determinante ändert ihr Vorzeichen, sobald man zwei ihrer Parallelreihen vertauscht. (Vandermonde, Laplace.)

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 11 \qquad \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -11\,,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

$$\Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} a_{55} = -\Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{35} a_{44} a_{53}\,.$$

Werden die Zeilen (Kolonnen) beliebig untereinander vertauscht, wird also die Permutation der Zeilen geändert, so tritt bei jedem Glied der Entwicklung eine entsprechende Änderung in der Reihenfolge der Indizes ein. Gehört die neue Permutation zur selben Klasse wie die alte, so braucht kein Zeichenwechsel einzutreten, aber wohl im andern Fall. Das besagt der

4. Satz. Eine Determinante behält ihr Vorzeichen oder ändert es, falls die Zeilen (Kolonnen) untereinander permutiert werden, je nachdem die neue Permutation bezüglich der Zeilenfolge zur selben Klasse als die alte gehört oder nicht.

Hieraus folgt, daß die Determinante n-ter Ordnung mit $(-1)^{\frac{n}{2}(n-1)}$ multipliziert werden muß, sobald die Reihenfolge der Zeilen (Kolonnen) umgekehrt hingeschrieben wird. Ein anderes Beispiel ist:

$$\Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} a_{55} = \Sigma \pm a_{21} a_{52} a_{13} a_{34} a_{45}\,,$$

da (1 2 3 4 5) und (2 5 1 3 4) zur selben Klasse gehören.

Eine weitere Folgerung aus (4) ist der

5. Satz. Eine Determinante ist mit $(-1)^{m-1}$ zu multiplizieren, sobald m Parallelreihen zyklisch vertauscht werden.

Stimmen zwei Parallelreihen einer Determinante D in den entsprechenden Elementen überein, so geht bei

Vertauschung dieser beiden Reihen nach (3) D über in $-D$. Andererseits kann sich aber D nicht ändern, da die beiden Parallelreihen identisch waren; es müßte also sein

$$D = -D,$$

was nur für $D = 0$ möglich ist. Also ergibt sich der

6. Satz. Eine Determinante ist ihrem Werte nach Null, sobald zwei Parallelreihen übereinstimmen. (Vandermonde, Laplace.)

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ a & b & c & d \\ i & k & l & m \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} 7 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Die folgenden beiden Sätze sind nur andere Ausdrucksformen für (6):

(6A) Eine Determinante verschwindet, sobald man die Elemente einer Parallelreihe durch die entsprechenden einer anderen ersetzt.

(6B) Eine Determinante verschwindet, sobald man in einer Zeile (Kolonne) den ersten (zweiten) Index durch den einer anderen Zeile (Kolonne) ersetzt.

Eine weitere wichtige Eigenschaft drückt aus der

7. Satz. Multipliziert man alle Elemente einer Parallelreihe mit ein und derselben Zahl p, so wird der Wert der Determinante mit p multipliziert.

Es folgt dies aus der schon oben erwähnten Eigenschaft der Determinante, daß jedes Glied der Entwicklung eins der mit p multiplizierten Elemente enthält.

$$3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 15 \end{vmatrix} = 3\,(15 - 14) = 3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 21 & 15 \end{vmatrix} = 45 - 42,$$

$$\frac{1}{p} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \frac{c_1}{p} \\ a_2 & b_2 & \frac{c_2}{p} \\ a_3 & b_3 & \frac{c_3}{p} \end{vmatrix}.$$

Gilt das eben Erwähnte von allen Parallelreihen, so kann man sagen:

(7A) Eine n-gliedrige Determinante ist durch p^n teilbar, wenn jedes Element durch p teilbar ist.

Satz (7) läßt sich auch dahin aussprechen:

(7B) Man multipliziert eine Determinante mit einer Zahl, indem man die Elemente irgend einer Parallelreihe mit dieser Zahl multipliziert.

Für $p = -1$ ergibt sich der

8. Satz. Die Vorzeichen einer Parallelreihe können in die entgegengesetzten verwandelt werden, falls gleichzeitig die Determinante das entgegengesetzte Vorzeichen erhält.

$$\begin{vmatrix} -a & -b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Ebenfalls eine Folge von (7) unter Berücksichtigung von (6) ist der

9. Satz. Eine Determinante verschwindet, falls die Glieder einer Parallelreihe proportional den entsprechenden Gliedern einer anderen sind.

$$\begin{vmatrix} a & b & p \cdot a & d \\ a' & b' & p \cdot a' & d' \\ a'' & b'' & p \cdot a'' & d'' \\ a''' & b''' & p \cdot a''' & d''' \end{vmatrix} = p \cdot \begin{vmatrix} a & b & a & d \\ a' & b' & a' & d' \\ a'' & b'' & a'' & d'' \\ a''' & b''' & a''' & d''' \end{vmatrix} = 0.$$

Es mögen jetzt in einer n-gliedrigen Determinante die Elemente einer Zeile (z. B. der i-ten) aus je m Summanden bestehen:

$$\begin{aligned} a_{i1} &= \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \dots \\ a_{i2} &= \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 + \dots \\ &\dots\dots\dots\dots \\ a_{in} &= \alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \dots \end{aligned}$$

Dann weist in der Entwicklung der Determinante jedes Glied eine solche Summe als Faktor auf; das Hauptglied heißt z. B.

$$a_{11}\, a_{22} \dots a_{i-1,\, i-1} \cdot (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i + \dots) \cdot a_{i+1,\, i+1} \dots \cdot a_{nn}\, .$$

Die Summe aller dieser $n!$ Glieder kann (durch Ausmultiplikation) in $m \cdot n!$ Glieder zerlegt werden. Dabei mögen erst alle Glieder mit $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$ hingeschrieben werden, dann diejenigen mit $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ usw. Auf diese Weise wird man folgende m Determinanten erkennen:

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots \\ (\alpha_1 + \beta_1 + \dots) \dots (\alpha_n + \beta_n + \dots) \\ \dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots \\ \alpha_1 \dots \alpha_n \\ \dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots \\ \beta_1 \dots \beta_n \\ \dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix} + \dots,$$

oder wenn man Zeilen und Kolonnen vertauscht:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & (\alpha_1 + \beta_1 + \dots) & \dots & a_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & \dots & (\alpha_n + \beta_n + \dots) & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \alpha_1 & \dots & a_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & \dots & \alpha_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \beta_1 & \dots & a_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & \dots & \beta_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots$$

Das Ergebnis dieser Betrachtung kann zusammengefaßt werden in den

10. Satz. Sind in einer Determinante die Elemente einer Parallelreihe Aggregate von je m Gliedern, so läßt sich diese Determinante in ein Aggregat von m Determinanten zerlegen, die in allen Teilen mit der früheren übereinstimmen und nur an Stelle der zusammengesetzten Parallelreihe je eines der m Glieder enthält.

Umgekehrt kann man hiernach die Summe zweier oder mehrerer Determinanten vom n-ten Grad mit $(n-1)$ gleichen Zeilen (Kolonnen) als einzige Determinante schreiben.

$$\begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 + \beta_1 - \gamma_1 & b_1 \\ a_2 & \alpha_2 + \beta_2 - \gamma_2 & b_2 \\ a_3 & \alpha_3 + \beta_3 - \gamma_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 & b_1 \\ a_2 & \alpha_2 & b_2 \\ a_3 & \alpha_3 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 & b_1 \\ a_2 & \beta_2 & b_2 \\ a_3 & \beta_3 & b_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & \gamma_1 & c_1 \\ a_2 & \gamma_2 & c_2 \\ a_3 & \gamma_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a+p & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p & b \\ 0 & d \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' & m \\ a_1 & a_1' & a_1'' & m_1 \\ a_2 & a_2' & a_2'' & m_2 \\ a_3 & a_3' & a_3'' & m_3 \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} a & a' & a'' & n \\ a_1 & a_1' & a_1'' & n_1 \\ a_2 & a_2' & a_2'' & n_2 \\ a_3 & a_3' & a_3'' & n_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & a' & a'' & m \pm n \\ a_1 & a_1' & a_1'' & m_1 \pm n_1 \\ a_2 & a_2' & a_3'' & m_2 \pm n_2 \\ a_3 & a_3' & a_3'' & m_3 \pm n_3 \end{vmatrix}.$$

Die Sätze (9) und (10) führen zusammen zum

11. Satz. Eine Determinante ändert ihren Wert nicht, falls man zu den Elementen einer Parallelreihe die mit einer beliebigen Zahl p multiplizierten entsprechenden Elemente einer andern Parallelreihe addiert. (Jacobi.)

Die veränderte Determinante zerfällt nämlich nach (10) wieder in zwei Determinanten, von denen die eine gleich der ursprünglichen ist und die andere nach (9) verschwindet, wie aus folgendem Beispiel hervorgeht:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c + p \cdot a \\ a' & b' & c' + p \cdot a' \\ a'' & b'' & c'' + p \cdot a'' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & p \cdot a \\ a' & b' & p \cdot a' \\ a'' & b'' & p \cdot a'' \end{vmatrix}}_{= 0}.$$

Bemerkenswert ist der Sonderfall $p = 1$.

Macht man von den bisher entwickelten Sätzen einen zweckmäßigen Gebrauch, so kann man oft die Berechnung einer Determinante bedeutend vereinfachen.

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 13 & 17 & 8 & 10 \\ 10 & 15 & 7 & 9 \\ 14 & 16 & 8 & 11 \\ 22 & 31 & 15 & 21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 10 & 15 & 7 & 9 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ -8 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Die zweite Determinante folgt aus der ersten durch Verminderung der Elemente der ersten und dritten Zeile um die entsprechenden Elemente der zweiten Zeile und durch Verminderung der Elemente der vierten Zeile um die mit 2 multiplizierten entsprechenden Elemente der zweiten Zeile. Die dritte Determinante folgt aus der zweiten durch Verminderung der Elemente der zweiten Zeile um die mit 6 multiplizierten entsprechenden Elemente der ersten Zeile. Jetzt hat man erreicht, daß die Elemente einer Parallelreihe alle untereinander gleich sind. Die vierte Determinante folgt aus der dritten durch Subtraktion der Elemente der ersten Zeile je von den entsprechenden Elementen der zweiten, dritten und vierten Zeile. Dadurch hat man eine Determinante erhalten, deren Elemente einer Parallelreihe alle bis auf eins verschwinden. Wie sich die Berechnung einer solchen Determinante weiter gestaltet, wird im nächsten Paragraphen (3. Satz) gezeigt.

Denkt man sich in

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

jedes Element mit p^{i-k} multipliziert, wobei i der erste Index und k der zweite Index des Elementes sein soll, so wird z. B. das Glied

$$a_{1\alpha_1}\ a_{2\alpha_2}\ a_{3\alpha_3}\ \ldots\ a_{n\alpha_n}$$

übergehen in

$$a_{1\alpha_1}\cdot p^{1-\alpha_1}\cdot a_{2\alpha_2}\cdot p^{2-\alpha_2}\cdot a_{3\alpha_3}\cdot p^{3-\alpha_3}\cdot\ \ldots\ \cdot a_{n\alpha_n}\cdot p^{n-\alpha_n},$$

so daß das Glied $a_{1\alpha_1}\ \ldots\ a_{n\alpha_n}$ den Faktor

$$p^{1-\alpha_1+2-\alpha_2+\ldots+n-\alpha_n}$$

bekommt. Nun sind aber die Zahlen α weiter nichts als die Zahlen von 1 bis n in irgend einer Anordnung; ihre Summe ist demnach ebenso groß als die der Zahlen von 1 bis n. Also ist dieser Faktor

$$p^0 = 1.$$

Jedes der $n!$ Glieder der Determinante ändert sich demnach überhaupt nicht, woraus folgt der

12. Satz. Eine Determinante ändert ihren Wert nicht, wenn man jedem Element die $(i-k)$-te Potenz von irgend einer Zahl p als Faktor beifügt, wobei i die Zeile und k die Kolonne angibt, die sich in dem betreffenden Element kreuzen.

Für $p = -1$ wird ein Teil der Elemente negativ, während die anderen Elemente unverändert bleiben. Man nennt dann diejenigen Stellen der Determinante, an denen positive Elemente stehen, gerade und die anderen ungerade Stellen.

§ 7. Unterdeterminanten im engeren Sinne.

Nach dem Entwicklungsgesetz werden von den $n!$ Gliedern der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

eine ganze Anzahl das Element a_{11} als Faktor haben; ihre Summe sei $a_{11} A_{11}$. Von den übrigbleibenden Gliedern werden dann einige den Faktor a_{12} haben; ihre Summe sei $a_{12} A_{12}$. Von den nunmehr übrigbleibenden Gliedern werden wieder diejenigen zusammengefaßt, welche a_{13} als Faktor aufweisen, und ihre Summe mit $a_{13} A_{13}$ bezeichnet usw. Schließlich werden nur solche Glieder übrigbleiben, die a_{1n} als Faktor aufweisen: sie werden mit $a_{1n} A_{1n}$ bezeichnet. Demnach kann man schreiben:

$$D = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \dots + a_{1n} A_{1n}.$$

Es muß noch darauf hingewiesen werden, daß jede einzelne Teilsumme auch die Gesamtheit aller Glieder ist, welche das betreffende Element als Faktor haben. Würde man nämlich annehmen, es befände sich z. B. außer den durch $a_{1r} A_{1r}$ dargestellten Gliedern in den vorausgenommenen bereits ein solches, welches a_{1r} enthält, so müßte dasselbe außer a_{1r} sicher noch eins der Elemente a_{11}, a_{12}, $\dots$, $a_{1,r-1}$ enthalten, also zwei Elemente einer Parallelreihe, was bekanntlich ausgeschlossen ist.

Greift man nicht die Elemente der ersten Zeile, sondern die einer beliebigen, z. B. der i-ten, heraus, so wird man in ähnlicher Weise schreiben können:

$$D = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in},$$

wo also z. B. $a_{i2} \cdot A_{i2}$ die Summe aller Glieder von D bedeutet, die das Element a_{i2} als Faktor enthalten.

Ebenso kann man weiterhin die Elemente einer Kolonne bevorzugen:

$$D = a_{1k} A_{1k} + a_{2k} A_{2k} + \dots + a_{nk} A_{nk} .$$

Eine derartige Darstellung der Determinante nennt man ihre Entwicklung nach den Elementen einer Parallelreihe. (Cramer, Canchy, Jacobi.)

Man sieht aus diesen Betrachtungen, daß es n^2 ganz bestimmte Größen A gibt, von denen jede einem bestimmten Element zugeordnet ist, und zwar in der Weise, daß sie mit diesem Element multipliziert die Summe aller der Glieder der Determinanten liefert, welche das ihr zugeordnete Element als Faktor enthalten.

Die eben neu eingeführten Größen A sollen jetzt weiter untersucht werden.

Zu diesem Zwecke mag ganz allgemein die Summe aller der Glieder gefunden werden, die das durch die i-te Zeile und k-te Kolonne definierte Element a_{ik} enthalten, also $a_{ik} A_{ik}$.

Im Hauptglied

$$a_{11}\ a_{22}\ \dots\ a_{i-1,i-1}\ a_{ii}\ a_{i+1,i+1}\ \dots$$
$$\dots\ a_{k-1,k-1}\ a_{kk}\ a_{k+1,k+1}\ \dots\ a_{nn}$$

werde eine zyklische Vertauschung der ersten Indizes von 1 bis i vorgenommen:

$$a_{i1}\ a_{12}\ a_{23}\ \dots\ a_{i-2,i-1}\ a_{i-1,i}\ a_{i+1,i+1}\ \dots$$
$$\dots\ a_{k-1,k-1}\ a_{kk}\ a_{k+1,k+1}\ \dots\ a_{nn},$$

womit nach Früherem (S. 21) $i-1$ Zeichenwechsel verbunden sind. Darauf werde eine abermalige zyklische

Vertauschung, und zwar der zweiten Indizes von 1 bis k vorgenommen:

$$a_{ik}\ a_{11}\ a_{22}\ \ldots\ a_{i-2,i-2}\ a_{i-1,i-1}\ a_{i+1,i}\ a_{i+2,i+1}\ \ldots$$
$$\ldots\ a_{k-1,k-2}\ a_{k,k-1}\ a_{k+1,k+1}\ \ldots\ a_{nn}\,,$$

womit abermals Zeichenwechsel, und zwar $k-1$ verbunden sind. Im ganzen kommen also $i+k-2$ Zeichenwechsel in Betracht, d. h. das letzterwähnte Glied hat den Faktor

$$(-1)^{i+k-2} = (-1)^{i+k}$$

zu erhalten.

Aus jedem einzelnen Glied der Determinante können alle anderen durch Permutation der ersten oder zweiten Indizes bestimmt werden, d. h. es kann hinsichtlich des letzten Gliedes geschrieben werden:

$$D = (-1)^{i+k}\,\Sigma \pm a_{ik}\,a_{11}\ \ldots\ a_{i-1,i-1}\,a_{i+1,i}\ \ldots$$
$$\ldots\ a_{k,k-1}\,a_{k+1,k+1}\ \ldots\ a_{nn}\,.$$

Will man nur diejenigen Glieder aus der hierdurch dargestellten Gesamtanzahl $n!$ haben, welche das Element a_{ik} als Faktor enthalten, so schließt man den ersten Index i bzw. den zweiten Index k von der Permutation der ersten bzw. der zweiten Indizes der Elemente aus. Das Element a_{ik} kann dann vor das Summenzeichen treten, was einem Ausklammern gleichkommt. Somit erhält man:

$$a_{ik}\cdot A_{ik} = (-1)^{i+k}\cdot a_{ik}\cdot \Sigma \pm a_{11}\ \ldots\ a_{i-1,i-1}\,a_{i+1,i}\ \ldots$$
$$\ldots\ a_{k,k-1}\,a_{k+1,k+1}\ \ldots\ a_{nn}$$

oder

$$A_{ik} = (-1)^{i+k}\cdot \Sigma \pm a_{11}\ \ldots\ a_{i-1,i-1}\,a_{i+1,i}\ \ldots$$
$$\ldots\ a_{k,k-1}\,a_{k+1,k+1}\ \ldots\ a_{nn}\,.$$

Das ist aber nichts anderes als eine mit $(-1)^{i+k}$ multiplizierte $(n-1)$-gliedrige Determinante; in ihrem

Hauptglied folgen die Indizes in der natürlichen Zahlenfolge aufeinander, jedoch fehlt bei den Zeilenindizes i und bei den Kolonnenindizes k.

Die neue Determinante geht somit aus der ursprünglichen hervor, indem man dort die i-te Zeile und die k-te Kolonne unterdrückt (ausläßt):

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \left| \begin{array}{ccc:ccc} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \hdashline a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right| .$$

Diese Determinante mit dem durch i und k definierten Vorzeichen bezeichnet man als Unterdeterminante des Elementes a_{ik} der Hauptdeterminante D.

Es mag hier schon hervorgehoben werden, daß später ganz allgemeine Unterdeterminanten besprochen werden sollen, von denen die jetzigen Sonderfälle vorstellen, und in diesem Sinne wurde in der Überschrift von Unterdeterminanten im engeren Sinne gesprochen; vorläufig mögen die eben bestimmten Determinanten schlechtweg mit Unterdeterminanten bezeichnet werden.

Aus den bisherigen Betrachtungen ergibt sich folgende

Definition der Unterdeterminanten:

1. Satz. Man versteht unter der Unterdeterminante A_{ik} irgend eines Elementes a_{ik} von

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

diejenige Determinante, welche man erhält, wenn man in D die i-te Zeile und die k-te Kolonne unterdrückt, versehen mit dem Vorzeichen von $(-1)^{i+k}$. Diese Determinante A_{ik} hat die Eigenschaft, daß sie, mit a_{ik} multipliziert, die Summe derjenigen Glieder gibt, die in der Entwicklung von D das Element a_{ik} als Faktor enthalten.

In bezug auf die Vorzeichen mag an die Entwicklung von (14) in § 6 erinnert werden; man erkennt leicht, daß die Unterdeterminanten jener Elemente als positiv zu bezeichnen sind, die an geraden Stellen stehen, und daß die andern negativ zu rechnen sind. Folgendes Schachbrettschema gibt hierfür einen Überblick:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Ferner mag nochmals an die doppelte Darstellung von D erinnert werden in folgender Form:

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$D = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{nk}A_{nk} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Jede dieser Gleichungen stellt n Gleichungen dar, entsprechend den n Werten von i bzw. k, so daß also D entsprechend den n Zeilen und n Kolonnen in $2n$-facher Weise nach Parallelreihen entwickelt dargestellt werden kann.

Diese Darstellung wurde oben als Entwicklung der Determinante nach den Elementen von Parallelreihen be-

zeichnet; man kann sie mit demselben Recht als Entwicklung nach den Unterdeterminanten der Elemente von Parallelreihen betrachten.

Beispiele:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$
$$= a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1).$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \begin{aligned} &= a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} + a_{14} A_{14} \\ &= a_{21} A_{21} + a_{22} A_{22} + a_{23} A_{23} + a_{24} A_{24} \\ &\text{usw.} \end{aligned}$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$= -a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$- a_{23} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{24} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \quad \text{usw.}$$

Von der Bedeutung der Unterdeterminanten bekommt man ferner einen Begriff, wenn man sich überlegt, daß

die Sätze (2), (7) und (8) von § 6 sich von selbst verstehen, sobald die dort erwähnten Determinanten nach den Elementen der dort besonders hervorgehobenen Zeilen entwickelt werden.

Folgende Sätze ergeben sich ohne weiteres aus der Definition:

2. Satz. Jede Unterdeterminante ist von den Elementen der sie bestimmenden Zeile und Kolonne unabhängig.

3. Satz. Verschwinden in einer Zeile oder Kolonne alle Elemente bis auf eins, so reduziert sich der Wert der Determinante auf das Produkt dieses Elementes mit seiner Unterdeterminante, also auf eine Determinante der nächstniederen Ordnung. (Jacobi.)

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_3 & b_4 \\ d_1 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}.$$

Hier mag daran erinnert werden, daß man nach den Entwicklungen im Anschluß an (11 A) § 6 jede Determinante auf die Form bringen kann, welche in diesem Satz verlangt wird: durch mehrmalige Anwendung des früheren Verfahrens im Verein mit dem eben angeführten 3. Satz läßt sich also der Grad einer Determinante beliebig erniedrigen. Man erkennt hieraus die Bedeutung der Unterdeterminanten für die Auswertung der Determinanten. (Kronecker.)

Durch fortgesetzte Anwendung von (3) läßt folgendes Beispiel einen andern Satz erkennen:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & a_{55} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \begin{vmatrix} a_{44} & a_{45} \\ 0 & a_{55} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44} \cdot a_{55} \,.$$

4. Satz. Sind alle Elemente auf einer Seite der Hauptdiagonale Null, so ist die Determinante ihrem Werte nach gleich dem Produkt der Elemente der Hauptdiagonale.

Der 4. Satz gibt ein Mittel an die Hand, jede Determinante in eine solche von der nächsthöheren Ordnung, allgemein sogar in eine solche von beliebig höherer Ordnung zu verwandeln. Soll z. B. die dreigliedrige Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

in eine fünfgliedrige Determinante verwandelt werden, so braucht man sie nur zu schreiben:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

wobei die x und y vollständig willkürlich sein können. Die zweimalige Zerlegung in Unterdeterminanten führt auf die ursprüngliche dreigliedrige Determinante.

Allgemein würde dieses „Verfahren der Ränderung" (Säumung) einer Determinante auszusprechen sein:

5. Satz. Soll eine Determinante n-ten Grades, ohne daß ihr Wert geändert wird, einen um m Einheiten höheren Grad erlangen, so setze man in die Verlängerung der Hauptdiagonale m Einsen und fülle die Stellen der hierdurch angedeuteten erweiterten Determinante auf der einen Seite der Hauptdiagonale durch Nullen und auf der andern Seite durch beliebige Größen aus.

Die $2n$-fach mögliche Darstellung einer n-gliedrigen Determinante (S. 49) in Verbindung mit den Sätzen (6) § 5 führt zum

6. Satz. Während die Summe der Produkte aller Elemente einer Parallelreihe mit den betreffenden Unterdeterminanten die Determinante selbst ergibt, verschwindet die Summe der Produkte aller Elemente einer Parallelreihe mit den entsprechenden Unterdeterminanten der Elemente einer anderen Parallelreihe. (Cramer, Cauchy, Jacobi.)

Man kann diesen Satz auch ausdrücken durch die Doppelgleichung:

$$\Sigma a_{ik} A_{rs} = \begin{cases} D & \text{falls } i = r \text{ und } k = s \text{ und entweder } i \text{ oder } k \text{ alle Werte von 1 bis } n \text{ durchläuft.} \\ 0 & \text{falls } i \neq r \text{ (oder } k \neq s\text{) und } k \text{ und } s \text{ (oder } i \text{ und r) gleichzeitig alle Werte von 1 bis } n \text{ durchlaufen.} \end{cases}$$

Schließlich mag noch die Bezeichnungsweise der Unterdeterminanten durch Differentiation erwähnt werden. (Jacobi.)

Werden die n^2 Elemente a der n-gliedrigen Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

als voneinander unabhängige Variable betrachtet, so ist D nach dem Bildungsgesetz bezüglich jedes der n^2 Elemente vom ersten Grad; oder mit andern Worten, die Determinante D ist in $2n$-fach verschiedener Weise als lineare Funktion der Variablen einer Parallelreihe darstellbar.

Differentiiert man unter der eben gemachten Annahme, daß alle Elemente voneinander unabhängige Variable sind, D nach a_{ik}, so können nur die durch $a_{ik} A_{ik}$ dargestellten Glieder in Betracht kommen; da ferner A_{ik} auch von a_{ik} unabhängig ist, so kann man schreiben:

$$\frac{\partial D}{\partial a_{ik}} = \frac{\partial (a_{ik} \cdot A_{ik})}{\partial a_{ik}} = A_{ik} .$$

Unter den gemachten Voraussetzungen darf man also sagen:

7. Satz. Die bezüglich eines beliebigen ihrer Elemente gebildete Abgeleitete einer Determinante ist gleich der Unterdeterminante des betreffenden Elementes.

Sind die a im besonderen alle Funktionen von einer Variablen, z. B. von x, so kann man schreiben:

$$\frac{dD}{dx} = \sum_{ik} \frac{\partial D}{\partial a_{ik}} \cdot \frac{d a_{ik}}{dx} = \sum_{ik} A_{ik} \frac{d a_{ik}}{dx} .$$

Die Summe erstreckt sich über n^2 Glieder, denn i und k müssen alle Werte von 1 bis n annehmen.

Führt man zunächst nur die Summation bezüglich k aus, so kommt:

$$\frac{dD}{dx} = \sum_i A_{i1}\frac{da_{i1}}{dx} + \sum_i A_{i2}\frac{da_{i2}}{dx} + \ldots + \sum_i A_{in}\frac{da_{in}}{dx}.$$

Führt man $\frac{da_{ik}}{dx} = a'_{ik}$ ein, und bedenkt man, daß jede einzelne Summe als Determinante geschrieben werden kann, so ist:

$$\frac{dD}{dx} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots$$

Man schreibt diese Gleichung auch folgendermaßen:

$$dD = \begin{vmatrix} da_{11} & da_{12} & \ldots & da_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ da_{21} & da_{22} & \ldots & da_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots$$

§ 8. Unterdeterminanten im weiteren Sinne.

Bevor auf die Unterdeterminanten in ihrer größten Allgemeinheit eingegangen wird, soll zunächst an die bisherigen Betrachtungen angeknüpft und die Entstehung und die Eigenschaften der

(n — 2)-gliedrigen Unterdeterminanten

besprochen werden.

Am Anfang von § 7 wurde die Aufgabe behandelt, in der Entwicklung von

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot \ \cdot \ \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

den Faktor von a_{ik} zu bestimmen. Jetzt soll in derselben Entwicklung der Faktor von $a_{ik} \cdot a_{rs}$ bestimmt werden, wobei die Indizes i und r $(i < r)$ zwei beliebige Zeilen und k und s $(k < s)$ zwei beliebige Kolonnen definieren mögen.

Im Anfangsglied

$$a_{11} \ \dots \ a_{ii} \ \dots \ a_{rr} \ \dots \ a_{nn}$$

führt man eine zyklische Vertauschung der ersten Indizes 1 bis i aus ($i - 1$ Zeichenwechsel):

$$a_{i1} \ a_{12} \ a_{23} \ \dots \ a_{i-1,i} \ a_{i+1,i+1} \ \dots \ a_{rr} \ \dots \ a_{nn}$$

und hierin eine ebensolche der ersten Indizes von 1 bis r, wobei zu beachten ist, daß der Index i fehlt ($r - 2$ weitere Zeichenwechsel):

$$a_{i1} \ a_{r2} \ a_{13} \ \dots \ a_{i-2,i} \ a_{i-1,i+1} \ a_{i+1,i+2} \ \dots$$
$$\dots \ a_{r-1,r} \ a_{r+1,r+1} \ \dots \ a_{nn} \, .$$

Jetzt läßt man die ersten Indizes in dieser Aufeinanderfolge stehen und führt eine zyklische Vertauschung der zweiten Indizes 1 bis k aus ($k - 1$ Zeichenwechsel) und darauf eine ebensolche der zweiten Indizes 1 bis s, wobei wieder zu beachten ist, daß der Index k fehlt ($s - 2$ weitere Zeichenwechsel). Im ganzen haben nunmehr

$$(i - 1) + (r - 2) + (k - 1) + (s - 2)$$

Zeichenwechsel stattgefunden, so daß das neue Glied das Vorzeichen von

$$(-1)^{i+r+k+s}$$

erhalten muß, denn

$$(-1)^{i-1+r-2+k-1+s-2} = (-1)^{i+r+k+s}.$$

Betreffs der Aufeinanderfolge der Indizes ist zu bemerken, daß die Reihenfolge der ersten Indizes lautet:

$i, r, 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, r-1, r+1, \ldots, n$

während die der zweiten heißt:

$k, s, 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, s-1, s+1, \ldots, n.$

Unter

$$\begin{Bmatrix} i\,k \\ s\,r \end{Bmatrix} (a_{11} \ldots a_{nn})$$

verstehe man das Produkt von $(n-2)$ Elementen a, die wie gewöhnlich durch doppelte Indizes gekennzeichnet seien; die Reihenfolge der ersten sowohl wie die der zweiten Indizes sei die der natürlichen Zahlenreihe, jedoch derart, daß in der Aufeinanderfolge der ersten Indizes i nnd r, in der zweiten die Indizes k und s fehlen.

Mit Hilfe dieser neuen Bezeichnungsweise kann das Glied, welches aus dem Anfangsglied durch die vier obigen zyklischen Vertauschungen hervorgeht, unter Berücksichtigung der Zeichenwechsel geschrieben werden:

$$(-1)^{i+r+k+s} a_{ik} a_{rs} \begin{Bmatrix} i\,k \\ r\,s \end{Bmatrix} (a_{11} \ldots a_{nn}).$$

Wollte man aus diesem Gliede die Determinante entwickeln, so würde sein:

$$D = (-1)^{i+r+k+s} \Sigma \pm a_{ik} a_{rs} \begin{Bmatrix} i\,k \\ r\,s \end{Bmatrix} (a_{11} \ldots a_{nn}).$$

Man erhält alle diejenigen Glieder der Entwicklung von D, welche die Elemente a_{ik}, a_{rs} als Faktoren enthalten, wenn man in der letzten Gleichung die Indizes i, k, r, s von der Permutation ausschließt, so daß die Summe der gewünschten Glieder, die mit

$$a_{ik}\, a_{rs}\, A_{\left\{\begin{smallmatrix} i\,k \\ r\,s \end{smallmatrix}\right\}}$$

bezeichnet werde, folgende ist:

$$a_{ik}\, a_{rs} \cdot A_{\left\{\begin{smallmatrix} i\,k \\ r\,s \end{smallmatrix}\right\}} = (-1)^{i+r+k+s} \cdot a_{ik} \cdot a_{rs} \Sigma \pm \begin{Bmatrix} i\,k \\ r\,s \end{Bmatrix} (a_{11} \dots a_{nn})$$

oder

$$A_{\left\{\begin{smallmatrix} i\,k \\ r\,s \end{smallmatrix}\right\}} = (-1)^{i+r+k+s} \Sigma \pm \begin{Bmatrix} i\,k \\ r\,s \end{Bmatrix} (a_{11} \dots a_{nn}) .$$

Man erkennt hiernach sofort, daß $A_{\left\{\begin{smallmatrix} i\,k \\ r\,s \end{smallmatrix}\right\}}$ die mit dem Vorzeichen von $(-1)^{i+r+k+s}$ versehene Determinante ist, die man aus D erhält, falls man in D die i-te und r-te Zeile und k-te und s-te Kolonne unterdrückt:

$$\left|\begin{array}{ccc:ccc:ccc}
a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,s-1} & a_{1,s+1} & \dots & a_{1n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{i-1,1} & \dots & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\hdashline
a_{i+1,1} & \dots & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{r-1,1} & \dots & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\hdashline
a_{r+1,1} & \dots & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{n1} & \dots & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}\right| .$$

Wurden früher solche Determinanten, die durch Unterdrückung einer Zeile und einer Kolonne entstanden, Unterdeterminanten schlechthin genannt, so mögen auch die jetzt durch Unterdrückung zweier Zeilen und zweier Kolonnen entstehenden Determinanten den Namen Unterdeterminanten erhalten, allerdings im weiteren Sinn. Die früheren Unterdeterminanten im engeren Sinn können nämlich als Unterdeterminanten $(n-1)$-ter Ordnung der n-gliedrigen Hauptdeterminante bezeichnet werden und die jetzigen dementsprechend als solche $(n-2)$-ter Ordnung. Man erkennt hiernach schon, daß ganz allgemein unter Unterdeterminanten solche verstanden werden, die durch Unterdrückung von gleichen Anzahlen Zeilen und Kolonnen aus der Hauptdeterminante entstehen. Doch zuvor mag, wie schon erwähnt, zum besseren Verständnis der ganz allgemeinen Unterdeterminanten noch etwas weiter auf die Unterdeterminanten $(n-2)$-ter Ordnung eingegangen werden.

Durch

$$a_{ik}\, a_{rs}\, A_{\left\{ik \atop rs\right\}}$$

werden zwar alle Glieder dargestellt, die a_{ik} und a_{rs} als Faktoren aufweisen, jedoch noch nicht alle, deren Summe $A_{\left\{ik \atop rs\right\}}$ als Faktor enthält; denn man braucht nur in allen durch

$$a_{ik} \cdot a_{rs} \cdot A_{\left\{ik \atop rs\right\}}$$

dargestellten Gliedern die Transposition (k, s) auszuführen (Zeichenwechsel!), so stellt

$$-a_{is} \cdot a_{rk} \cdot A_{\left\{ik \atop rs\right\}}$$

eine weitere Gliedersumme dar, welche $A_{\left\{ {ik \atop rs} \right\}}$ als Faktor enthält. Da die beiden Zahlen s und k nur die beiden Permutationen (k, s) und (s, k) zulassen, so wird durch

$$(a_{ik}\, a_{rs} - a_{is}\, a_{rs}) \cdot A_{\left\{ {ik \atop rs} \right\}}$$

diejenige Gliedersumme dargestellt, welche $A_{\left\{ {ik \atop rs} \right\}}$ als Faktor enthält. Schreibt man

$$(a_{ik}\, a_{rs} - a_{is}\, a_{rk}) = \begin{vmatrix} a_{ik} & a_{rk} \\ a_{is} & a_{rs} \end{vmatrix} = a_{\left\{ {ik \atop rs} \right\}},$$

so ist $a_{\left\{ {ik \atop rs} \right\}}$ der Koeffizient von $A_{\left\{ {ik \atop rs} \right\}}$ in der

Entwicklung von D nach Unterdeterminanten $(n-2)$-ter Ordnung, welche jetzt gezeigt werden soll.

Durch

$$a_{\left\{ {ik \atop rs} \right\}} \cdot A_{\left\{ {ik \atop rs} \right\}}$$

werden von den $n!$ Gliedern der n-gliedrigen Determinante D nur $2! \cdot (n-2)!$ dargestellt. Will man die übrigen auch durch Unterdeterminanten $(n-2)$-ter Ordnung ausdrücken, so muß man sie in derselben Weise zu je $2! \cdot (n-2)!$ zusammenfassen, was offenbar $\binom{n}{2}$-mal möglich ist. Es ist dies eine Anwendung von dem Spezialfall $n = m_1 + m_2 = 2 + (n-2)$ S. 15. Erst müssen die beiden Indizes k und s einerseits und die $(n-2)$ übrigen zweiten Indizes andererseits auf alle mögliche Art permutiert werden, was zu den beiden Determinanten

$a_{\left\{ik \atop rs\right\}}$ und $A_{\left\{ik \atop rs\right\}}$ führt, deren Produkt die obigen $2! \cdot (n-2)!$ Glieder liefert. Nun müssen je zwei zweite Indizes aus der Ziffernfolge $1, 2, \ldots, n$ auf alle mögliche Weise herausgegriffen werden, was mit der Aufstellung aller $\binom{n}{2}$ möglichen zweigliedrigen Determinanten aus der Matrix

$$\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rn} \end{vmatrix}$$

zusammenfällt. Durch irgend eine zweigliedrige Determinante a dieser Matrix sind in der n-gliedrigen Determinante D zwei Zeilen und zwei Kolonnen gekennzeichnet, welche unterdrückt werden müssen, damit man diejenige $(n-2)$-gliedrige Unterdeterminante erhält, mit der die eben erwähnte zweigliedrige Determinante in der gesuchten Entwicklung multipliziert erscheint. Die Summe aller in der obigen Matrix enthaltenen zweigliedrigen Determinanten multipliziert mit den entsprechenden $(n-2)$-gliedrigen Unterdeterminanten ist die gesuchte Entwicklung nach $(n-2)$-gliedrigen Unterdeterminanten; sie wird ausgedrückt durch folgende Formel:

$$D = \sum_{k,s} a_{\left\{ik \atop rs\right\}} \cdot A_{\left\{ik \atop rs\right\}}, \qquad (k, s = 1, 2, \ldots, n)$$

die sich nach den vorausgegangenen Betrachtungen von selbst versteht.

Die früheren Entwicklungen von D nach den Elementen einer Parallelreihe (vgl. S. 49) wurden bereits S. 53 durch eine Summenformel angedeutet. Letztere

hätte man bei Bevorzugung der Kolonnen auch schreiben können:

$$D = \sum_k a_{ik} A_{ik}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

womit eine gewisse Ähnlichkeit mit der obigen Formel erreicht ist.

D verschwindet bekanntlich, sobald zwei Parallelreihen identisch sind. Da können die beiden Parallelreihen entweder beide zur Bildung der obigen zweigliedrigen Determinante beitragen, oder beide nicht, oder schließlich nur eine von ihnen. Diese Überlegungen, weiter ausgeführt, würden zu einer ähnlichen umfassenden Formel führen, wie sie S. 53 gegeben wurde.

Über die verschiedenen Möglichkeiten, ein und dieselbe n-gliedrige Determinante nach $(n-2)$-gliedrigen Unterdeterminanten zu entwickeln, ist folgendes zu bemerken. Man kann in $\binom{n}{2}$-fach verschiedener Weise von den n Zeilen je zwei zur Bildung der zweigliedrigen Determinanten herausgreifen, was natürlich auch für die Kolonnen gilt, so daß also eine n-gliedrige Determinante in $2 \cdot \binom{n}{2} = n(n-1)$-fach verschiedener Weise nach $(n-2)$-gliedrigen Unterdeterminanten entwickelt werden kann.

Ein Beispiel für eine Entwicklung einer fünfgliedrigen Determinante nach dreigliedrigen Unterdeterminanten mag die vorausgegangenen Betrachtungen erläutern helfen. Die Entwicklung wird $\binom{5}{2} = 10$ Produkte aufweisen, von denen jedes aus einer zwei- und einer dreigliedrigen Determinante besteht; zur Entwicklung wurde bevorzugt die dritte und fünfte Kolonne:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} c_1 & e_1 \\ c_2 & e_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \\ a_5 & b_5 & d_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & e_1 \\ c_3 & e_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_4 & b_4 & d_4 \\ a_5 & a_5 & d_5 \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} c_1 & e_1 \\ c_4 & e_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_5 & b_5 & d_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & e_1 \\ c_5 & e_5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} c_2 & e_2 \\ c_3 & e_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_4 & b_4 & d_4 \\ a_5 & b_5 & d_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_2 & e_2 \\ c_4 & e_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_5 & b_5 & d_5 \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} c_2 & e_2 \\ c_5 & e_5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} c_3 & e_3 \\ c_4 & e_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_5 & b_5 & d_5 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} c_3 & e_3 \\ c_5 & e_5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} c_4 & e_4 \\ c_5 & e_5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} .$$

Auch die $(n-2)$-gliedrigen Unterdeterminanten einer n-gliedrigen Determinante D lassen eine Bezeichnungsweise durch Differentiation zu, falls wieder die n^2 Elemente als voneinander unabhängige Variable angesehen werden:

$$\frac{\partial^2 D}{\partial a_{ik}\, \partial a_{rs}} = A_{\left\{ {ik \atop rs} \right\}} ,$$

worauf aber nicht weiter eingegangen werden soll.

Im Anschluß an die bisherige Entwicklung der $(n-2)$-gliedrigen Unterdeterminanten soll nunmehr zu den

Unterdeterminanten ganz allgemeiner Natur

übergegangen und zur Einführung folgende Aufgabe gelöst werden.

Definieren folgende Zahlen α:

$$1 \leqq \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_m \leqq n$$

$m (m < n)$ erste Indizes und die Zahlen β:

$$1 \leqq \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_m \leqq n$$

m zweite Indizes, so werden in der Entwicklung von

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot \;\cdot\; \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

eine Reihe Glieder enthalten sein, die folgendes Produkt als Faktor enthalten:

$$a_{\alpha_1 \beta_1} \cdot a_{\alpha_2 \beta_2} \cdot \ldots \cdot a_{\alpha_m \beta_m}.$$

Es soll die Summe aller dieser Glieder angegeben werden.

Zunächst empfiehlt es sich, durch geschickte Vertauschung der Indizes die Grundpermutation

$$a_{11} \; a_{22} \; \ldots \; a_{nn}$$

überzuführen in

$$a_{\alpha_1 \beta_1} \; a_{\alpha_2 \beta_2} \; \ldots \; a_{\alpha_m \beta_m} \begin{Bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \cdot & \cdot \\ \alpha_m & \beta_m \end{Bmatrix} (a_{11} \; \ldots \; a_{nn}),$$

wobei ähnlich wie früher (S. 57)

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ . & . \\ \alpha_m & \beta_m \end{Bmatrix} (a_{11} \; \ldots \; a_{nn})$$

bedeuten soll, daß die ersten und zweiten Indizes in der natürlichen Zahlenreihe aufeinanderfolgen, daß aber unter den ersten die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ und unter den zweiten die Zahlen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ fehlen.

Aus den bisherigen Betrachtungen geht hervor, daß es

$$\alpha_1 - 1 + \beta_1 - 1$$

Zeichenwechsel bedarf, um das Glied $a_{11} \ldots a_{nn}$ überzuführen in das Glied $a_{\alpha_1 \beta_1} \{\alpha_1 \, \beta_1\} (a_{11} \; \ldots \; a_{nn})$, daß es weiterer

$$\alpha_2 - 2 + \beta_2 - 2$$

Zeichenwechsel bedarf, um das letzterwähnte Glied überzuführen in $a_{\alpha_1 \beta_1} a_{\alpha_2 \beta_2} \begin{Bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{Bmatrix} (a_{11} \; \ldots \; a_{nn})$. Ferner würde es

$$\alpha_3 - 3 + \beta_3 - 3$$

Zeichenwechsel bedürfen, um vom letzten Glied zu kommen auf das Glied

$$a_{\alpha_1 \beta_1} \; a_{\alpha_2 \beta_2} \; a_{\alpha_3 \beta_3} \begin{Bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{Bmatrix} (a_{11} \; \ldots \; a_{nn}) .$$

Allgemein wird es hiernach

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_m \\ - 2(1 + 2 + \ldots + m)$$

Zeichenwechsel bedürfen, um

$$a_{11}\ a_{22}\ \ldots\ a_{nn}$$

überzuführen in

$$a_{\alpha_1\beta_1}\ a_{\alpha_2\beta_2}\ \ldots\ a_{\alpha_m\beta_m} \begin{Bmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_m & \beta_m\end{Bmatrix} (a_{11}\ \ldots\ a_{nn})\,.$$

Also hat dieses letzte Glied das Vorzeichen von

$$(-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m+\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_m-2\cdot(1+2+\ldots+m)}\,.$$

Da $2(1+2+\ldots+m)$ eine gerade Zahl ist, kommt es nur an auf das Vorzeichen von

$$(-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m+\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_m} = (-1)^{\Sigma\alpha+\Sigma\beta}\,.$$

Das so erhaltene Glied

$$(-1)^{\Sigma\alpha+\Sigma\beta}\ a_{\alpha_1\beta_1}\ \ldots\ a_{\alpha_m\beta_m} \begin{Bmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_m & \beta_m\end{Bmatrix} (a_{11}\ \ldots\ a_{nn})$$

ist eins der $n!$ Glieder der entwickelten Determinante n-ter Ordnung D. Es soll für die folgenden Betrachtungen als Grundglied angesehen werden. Da sämtliche $n!$ Glieder einer Determinante aus jedem einzelnen Glied und damit die Determinante selbst gebildet werden kann, so ergibt sich für diese:

$$D=(-1)^{\Sigma\alpha+\Sigma\beta}\,\Sigma\pm a_{\alpha_1\beta_1}\ldots a_{\alpha_m\beta_m} \begin{Bmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_m & \beta_m\end{Bmatrix} (a_{11}\ldots a_{nn})\,.$$

Es sollte vorläufig nur die Summe, sie sei bezeichnet durch

$$a_{\alpha_1\beta_1}\ \ldots\ a_{\alpha_m\beta_m}\cdot A_{\begin{Bmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_m & \beta_m\end{Bmatrix}}\,,$$

aller der Glieder aufgestellt werden, welche das Produkt $a_{\alpha_1\beta_1} \ldots a_{\alpha_m\beta_m}$ als Faktor aufweisen. Man hat dann in der obigen Summenformel nicht alle n ersten oder alle n zweiten Indizes zu permutieren, sondern nur diejenigen von

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \cdot & \cdot \\ \alpha_m & \beta_m \end{Bmatrix} (a_{11} \ldots a_{nn}),$$

so daß der gemeinschaftliche Faktor $a_{\alpha_1\beta_1} \ldots a_{\alpha_m\beta_m}$ vor das Summenzeichen treten kann. Damit ist die eingangs erwähnte Aufgabe gelöst, und die Summe aller dort erwähnten Glieder ist also:

$$a_{\alpha_1\beta_1} \ldots a_{\alpha_m\beta_m} \cdot A_{\begin{Bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \cdot & \cdot \\ \alpha_m & \beta_m \end{Bmatrix}}$$

$$= a_{\alpha_1\beta_1} \ldots a_{\alpha_m\beta_m} \cdot (-1)^{\Sigma\alpha + \Sigma\beta} \cdot \Sigma \pm \begin{Bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \cdot & \cdot \\ \alpha_m & \beta_m \end{Bmatrix} (a_{11} \ldots a_{nn}).$$

Die neue Größe

$$A_{\begin{Bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \cdot & \cdot \\ \alpha_m & \beta_m \end{Bmatrix}} = (-1)^{\Sigma\alpha + \Sigma\beta} \Sigma \pm \begin{Bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \cdot & \cdot \\ \alpha_m & \beta_m \end{Bmatrix} (a_{11} \ldots a_{nn})$$

bezeichnet man als Unterdeterminante $(n - m)$-ter Ordnung der n-gliedrigen Determinante D bezüglich der Elemente $a_{\alpha_1\beta_1} \ldots a_{\alpha_m\beta_m}$.

Daß auch sie unter gewissen Voraussetzungen (vgl. S. 54 u. 63) durch Differentialquotienten bezeichnet werden kann, mag hier nur beiläufig erwähnt werden.

Die eben gefundene Unterdeterminante hat also die Eigenschaft, daß sie, mit dem Produkt der Elemente

$a_{\alpha_1\beta_1} \ldots a_{\alpha_m\beta_m}$ multipliziert, in der Entwicklung von D die Summe aller derjenigen Glieder angibt, die das Produkt der eben erwähnten Elemente als Faktor enthalten. Man bildet diese Determinante aus D, indem man dort die α_1-te, die α_2-te, ..., die α_m-te Zeile und die β_1-te, die β_2-te, ..., die β_m-te Kolonne unterdrückt.

Wie setzt sich nun ganz allgemein eine n-gliedrige Determinante aus $(n-m)$-gliedrigen Unterdeterminanten zusammen?

Um diese Frage zu beantworten, mag zunächst nochmals auf die Bildung aller $n!$ Permutationen von n Elementen in der Einleitung (S. 15) verwiesen werden, falls bestimmte Gruppen $(n = m_1 + m_2 = m + (n-m))$ beibehalten werden.

Sollen alle $n!$ Permutationen der n Elemente

$$a_{\alpha_1\beta_1} \ldots a_{\alpha_m\beta_m} \begin{Bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_m & \beta_m \end{Bmatrix} (a_{11} \ldots a_{nn})$$

gebildet werden, was ja der Entwicklung der n-gliedrigen Determinante aus dem Glied

$$(-1)^{\Sigma\alpha + \Sigma\beta}\, a_{\alpha_1\beta_1} \ldots a_{\alpha_m\beta_m} \begin{Bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_m & \beta_m \end{Bmatrix} (a_{11} \ldots a_{nn})$$

entspricht, so hat man in diesem Glied z. B. zuerst die ersten Indizes in

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_m & \beta_m \end{Bmatrix} (a_{11} \ldots a_{nn})$$

auf jede mögliche Weise zu permutieren. Die Summe der mit den richtigen Vorzeichen versehenen Produkte,

die diesen Permutationen entsprechen, ist die oben bestimmte Summe

$$a_{\alpha_1\beta_1}\ \dots\ a_{\alpha_m\beta_m}\ A_{\begin{Bmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \cdot & \cdot\\ \alpha_m & \beta_m\end{Bmatrix}}.$$

Hat man auf diese Weise von allen $n!$ Permutationen und damit von allen $n!$ Gliedern der entwickelten Determinante $(n-m)!$ erhalten, so permutiert man nunmehr in jeder der obigen $(n-m)!$ Permutationen die ersten Indizes von

$$a_{\alpha_1\beta_1}\ \dots\ a_{\alpha_m\beta_m}$$

auf jede mögliche Art. Die Summe der jetzt den $(n-m)!\cdot m!$ Permutationen entsprechenden Glieder, auch wieder jedes mit seinem richtigen Vorzeichen versehen, könnte man bezeichnen durch:

$$S=\Sigma\pm\left[a_{\alpha_1\beta_1}\dots a_{\alpha_m\beta_m}\cdot(-1)^{\Sigma\alpha+\Sigma\beta}\cdot\Sigma\pm\begin{Bmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \cdot & \cdot\\ \alpha_m & \beta_m\end{Bmatrix}(a_{11}\dots a_{nn})\right].$$

Da jedoch jedes Glied der Gesamtsumme die innere Summe als Faktor enthält, so kann man auch schreiben:

$$S=(\Sigma\pm a_{\alpha_1\beta_1}\ \dots\ a_{\alpha_m\beta_m})\cdot(-1)^{\Sigma\alpha+\Sigma\beta}$$
$$\cdot\,\Sigma\pm\begin{Bmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \cdot & \cdot\\ \alpha_m & \beta_m\end{Bmatrix}(a_{11}\ \dots\ a_{nn}).$$

Bezeichnet man

$$\Sigma\pm a_{\alpha_1\beta_1}\ \dots\ a_{\alpha_m\beta_m}=a_{\begin{Bmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \cdot & \cdot\\ \alpha_m & \beta_m\end{Bmatrix}},$$

so wird

$$S = a_{\begin{Bmatrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ \cdot & \cdot \\ \alpha_m & \beta_m\end{Bmatrix}} \cdot A_{\begin{Bmatrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ \cdot & \cdot \\ \alpha_m & \beta_m\end{Bmatrix}}.$$

Man sieht ohne weiteres, daß $a_{\begin{Bmatrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ \cdot & \cdot \\ \alpha_m & \beta_m\end{Bmatrix}}$ die Determinante der Elemente ist, in denen sich die Zeilen und Kolonnen kreuzen, welche man unterdrücken muß, falls man $A_{\begin{Bmatrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ \cdot & \cdot \\ \alpha_m & \beta_m\end{Bmatrix}}$ erhalten will; auch diese Determinante kann natürlich als Unterdeterminante angesehen werden, und zwar als solche m-ter Ordnung.

Bis jetzt hat man von den $n!$ Permutationen, bzw. von den $n!$ Gliedern der Determinante erst $(n-m)! \cdot m!$. Nach den bereits mehrfach erwähnten Erörterungen S. 15 f. erhält man alle $n!$ Permutationen und damit alle $n!$ Glieder der Determinante, falls man für jede mögliche Gruppeneinteilung der n Elemente zu je m und $(n-m)$ die bisherigen $(n-m)! \cdot m!$ Permutationen bildet. Das ist aber in $\binom{n}{m}$-fach verschiedener Weise möglich.

In die Sprache der Determinanten übertragen, besagt das nichts anderes, als daß aus den m Kolonnen, welche durch die Indizes $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ charakterisiert sind, alle möglichen $\binom{n}{m}$ Determinanten a m-ten Grades gebildet werden sollen, und daß jede mit der durch sie bestimmten, oben näher bezeichneten Unterdeterminante A multipliziert wird. Die Summe aller dieser $\binom{n}{m}$ Produkte ist die gesuchte Entwicklung der n-gliedrigen Determinante D nach $(n-m)$-gliedrigen Unterdeterminanten

oder, wenn man will, auch nach m-gliedrigen Unterdeterminanten. Man kann diese Entwicklung durch die Formel ausdrücken:

$$D = \Sigma a_{\begin{Bmatrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ \cdot & \cdot \\ \alpha_m & \beta_m\end{Bmatrix}} \cdot A_{\begin{Bmatrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ \cdot & \cdot \\ \alpha_m & \beta_m\end{Bmatrix}} .$$

Eine solche Darstellung ist auf $2\binom{n}{m}$-fache Weise möglich, denn es können $\binom{n}{m}$-mal verschiedene m Kolonnen zur Bildung der a bevorzugt, außerdem dasselbe für Zeilen ausgeführt werden.

Eine Übersicht der nach Unterdeterminanten möglichen Entwicklungen einer n-gliedrigen Determinante D geben die S. 61 f. aufgestellten Summenformeln mit der obigen in folgender Zusammenstellung:

$$D = \Sigma a_{ik} A_{ik} \qquad 2\,n \text{ Möglichkeiten},$$

$$= \Sigma a_{\begin{Bmatrix}ik \\ rs\end{Bmatrix}} \cdot A_{\begin{Bmatrix}ik \\ rs\end{Bmatrix}} \qquad 2 \cdot \binom{n}{2} \quad \text{"} \quad ,$$

. . . .

$$= \Sigma a_{\begin{Bmatrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ \cdot & \cdot \\ \alpha_m & \beta_m\end{Bmatrix}} \cdot A_{\begin{Bmatrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ \cdot & \cdot \\ \alpha_m & \beta_m\end{Bmatrix}} \qquad 2 \cdot \binom{n}{m} \quad \text{"} \quad .$$

Die Summen sind also immer gleich D; nun ist eine Determinante mit gleichen Parallelreihen stets Null. Dem entspricht es, wenn man zur Bildung der a und A beliebige m und $(n - m)$ Parallelreihen aus D nimmt; dann sind also die oben verzeichneten Summen $= 0$, wenn auch nur eine gemeinsame Parallelreihe vorkommt.

Die gegebenen Entwicklungen der n-gliedrigen Determinante in eine Summe von Produkten je zweier Unterdeterminanten ist noch nicht der allgemeinste Fall. Die Bildung der $n!$ Permutationen bei Festhaltung von r Gruppen

zu je $m_1, m_2, \ldots, m_r$ Elementen (S. 17) zeigt ohne weiteres das Bildungsgesetz für den Fall, daß die Determinante n-ter Ordnung in eine Summe von Produkten aus je r Unterdeterminanten zerlegt werden soll, von denen die eine m_1, die zweite $m_2, \ldots$, die letzte m_r-gliedrig ist, falls

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_r = n .$$

Jedoch mag darauf nicht weiter eingegangen, sondern nur noch hervorgehoben werden, daß die früher gegebene Zahl $\frac{n!}{m_1!\,m_2!\ldots m_r!}$, dann die Anzahl der Determinantenprodukte in der Entwicklung ist. Diese Untersuchungen wurden zuerst von Vandermonde und Laplace angestellt.

Statt Unterdeterminante gebraucht man auch die Bezeichnung Subdeterminante, Jacobi nannte sie Partialdeterminante, die Engländer haben den Ausdruck Minor eingeführt.

Je zwei Unterdeterminanten, die in der Entwicklung einer Determinante nach Unterdeterminanten miteinander multipliziert auftreten, nennt man nach Cauchy komplementäre Unterdeterminanten; man findet dafür auch die Bezeichnung adjungierte Unterdeterminanten und bezeichnet die eine kurz als Komplement oder als Adjungierte der anderen, wobei man von den Vorzeichen absieht, als mit denen verbunden früher immer die A angesehen wurden. Dagegen nennt man die A in der früher verstandenen Weise die algebraischen Komplemente der in der Entwicklung mit ihnen multipliziert auftretenden a.

Mit Hilfe dieser Bezeichnungen kann man die Entwicklung einer Determinante nach Unterdeterminanten durch folgenden Satz ausdrücken.

Jede n-gliedrige Determinante kann als die Summe von $\binom{n}{m}$ Produkten der in m beliebigen

Zeilen oder Kolonnen enthaltenen $\binom{n}{m}$ m-gliedrigen Determinanten mit ihren algebraischen Komplementen angesehen werden.

Ferner nennt man Hauptunterdeterminanten, Hauptminoren solche, deren Hauptdiagonalelemente auch solche der Determinante sind. Aus der Bildung der Unterdeterminanten geht ohne weiteres hervor, daß es $\left[\binom{n}{m}\right]^2$ m-gliedrige Unterdeterminanten gibt, von denen $\binom{n}{m}$ Hauptminoren sind.

Unter konjugierten, auch korrespondierenden Unterdeterminanten einer Determinante versteht man je zwei solche, bei denen die Zeilen der einen durch dieselben Indizes charakterisiert werden wie die Kolonnen der anderen und umgekehrt; solche Unterdeterminanten vertauschen beim Umklappen der Determinante um die Hauptdiagonale ihre Plätze. Analoges gilt von den Elementen selbst, die ja als eingliedrige Unterdeterminanten gelten dürfen; in diesem Sinne spricht man auch von konjugierten oder korrespondierenden Elementen. Im besonderen sagt man von einem Hauptminor (Hauptdiagonalelement), daß er (es) zu sich selbst konjugiert ist.

Am Schluß dieser Betrachtungen über Unterdeterminanten mag noch auf einen Begriff aufmerksam gemacht werden, der erst neuerdings eingeführt worden ist (Kronecker), auf den Begriff des Ranges einer Determinante.

Das Verschwinden einer Determinante kann daran liegen, daß gewisse Unterdeterminanten verschwinden. Ist r die höchste Ordnung der nicht verschwindenden Unterdeterminanten, so hat die Determinante den Rang r.

Hiernach muß eine n-gliedrige nicht verschwindende Determinante den Rang n haben. Der Rang Null wird vor-

handen sein, wenn alle Elemente verschwinden. Irgend eine n-gliedrige Determinante mit m gleichen Parallelreihen wird den Rang $n - m + 1$ haben.

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & 5 & 9 & 7 \\ 2 & 1 & 9 & 3 & 9 \\ 4 & 2 & 8 & 6 & 3 \\ 8 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

hat den Rang 3; alle Unterdeterminanten vierter Ordnung und sie selbst verschwinden.

Im gleichen Sinne spricht man vom Rang einer Matrix.

§ 9. Multiplikationstheorem.

Ein besonderer Fall für die Entwicklung einer Determinante nach Unterdeterminanten mag zuvor als Überleitung zum Multiplikationstheorem Erwähnung finden.

In der n-gliedrigen Determinante D mögen diejenigen Elemente verschwinden, in denen sich die m ersten Zeilen mit den $(n - m)$ letzten Kolonnen kreuzen. Man erkennt dann ohne weiteres, daß die Entwicklung nach m- bzw. $(n - m)$-gliedrigen Unterdeterminanten sich auf ein einziges Produkt reduziert, da die m ersten Zeilen nur eine einzige m-gliedrige Determinante enthalten:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{m+1,1} & \cdots & a_{m+1,m} & a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} & a_{n,m+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,m+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Aus diesem Beispiel geht hervor, daß die Elemente, die denjenigen Zeilen und Kolonnen angehören, in denen keine verschwindenden Elemente stehen, für den Wert der Determinante ohne Bedeutung sind, was für die kommenden Betrachtungen besonders wichtig ist.

Die Vertauschung der linken Seite mit der rechten in der obigen Gleichung gibt ein Hilfsmittel, das Produkt zweier beliebiger Determinanten in eine einzige zu verwandeln; es wird dies ohne weiteres aus folgendem Beispiel klar:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c & d & e \\ c' & d' & e' \\ c'' & d'' & e'' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & x & y & z \\ a' & b' & x' & y' & z' \\ 0 & 0 & c & d & e \\ 0 & 0 & c' & d' & e' \\ 0 & 0 & c'' & d'' & e'' \end{vmatrix},$$

wobei x, y, z, x', y', z' ganz beliebige Werte sind, die man sich je nach Bedarf passend wählen kann.

Sollen zwei beliebige Determinanten miteinander multipliziert werden, so kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß beide Determinanten vom selben Grad sind; denn im andern Fall kann man nach dem Satz der Ränderung die Determinante von geringerem Grad auf den der anderen bringen.

Dementsprechend mag folgendes Produkt den weiteren Betrachtungen zugrunde gelegt werden:

$$D_a \cdot D_b = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & & \dots & a_{nn} & 0 & & \dots & -1 \\ 0 & & \dots & 0 & b_{11} & & \dots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & \dots & 0 & b_{n1} & & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} .$$

Die so erhaltene $2n$-gliedrige Determinante läßt sich auf eine n-gliedrige zurückführen; zu diesem Zweck wurden bereits die willkürlichen Elemente passend gewählt.

Denkt man sich jetzt in der letzten Determinante alle Elemente der ersten Zeile mit b_{11}, alle Elemente der zweiten Zeile mit b_{12} usw., schließlich alle Elemente der n-ten Zeile mit b_{1n} multipliziert und die Summe aller so erweiterten Elemente derselben Kolonne zu dem $(n+1)$-ten Element dieser Kolonne addiert, so heißen dann die Elemente der $n+1$ Zeile von links nach rechts:

$$a_{11} b_{11} + a_{21} b_{12} + \dots + a_{n1} b_{1n} = \Sigma a_{i1} b_{1i}$$
$$a_{12} b_{11} + a_{22} b_{12} + \dots + a_{n2} b_{1n} = \Sigma a_{i2} b_{1i}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$a_{1n} b_{11} + a_{2n} b_{12} + \dots + a_{nn} b_{1n} = \Sigma a_{in} b_{1i} ;$$

alle übrigen verschwinden; die Summenbezeichnungen mögen nur zur Abkürzung dienen.

Die so veränderte $2n$-gliedrige Determinante, welche nach (11 A) § 6 ihren Wert nicht geändert hat, stimmt

also bis auf die $(n+1)$-te Zeile, welche nunmehr die eben erwähnten Elemente hat, mit der ursprünglichen überein.

In ganz derselben Weise verändert man jetzt die $(n+2)$-te Zeile, nur daß man sich die Elemente der n ersten Zeilen entsprechend mit $b_{21}, b_{22}, b_{23}, \ldots, b_{2n}$ multipliziert und die Summe der so erweiterten Elemente derselben Kolonne zum $(n+2)$-ten Element dieser Kolonne addiert denkt. Die Elemente der $(n+2)$-ten Zeile sind dann:

$$\begin{array}{l} a_{11} b_{21} + a_{21} b_{22} + \ldots + a_{n1} b_{2n} = \Sigma a_{i1} b_{2i} \\ a_{12} b_{21} + a_{22} b_{22} + \ldots + a_{n2} b_{2n} = \Sigma a_{i2} b_{2i} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n} b_{21} + a_{2n} b_{22} + \ldots + a_{nn} b_{2n} = \Sigma a_{in} b_{2i}\,; \end{array}$$

alle übrigen verschwinden wieder.

Die n ersten Zeilen entsprechend erweitert mit den Elementen der dritten Zeile von D_b führen in ähnlicher Weise zu den neuen Elementen der $(n+3)$-ten Zeile:

$$\begin{array}{l} a_{11} b_{31} + a_{21} b_{32} + \ldots + a_{n1} b_{3n} = \Sigma a_{i1} b_{3i} \\ a_{12} b_{31} + a_{22} b_{32} + \ldots + a_{n2} b_{3n} = \Sigma a_{i2} b_{3i} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n} b_{31} + a_{2n} b_{32} + \ldots + a_{nn} b_{3n} = \Sigma a_{in} b_{3i}\,; \end{array}$$

alle übrigen Null.

Behandelt man die $(n+4)$-te Zeile ebenso, indem man sich wieder die n ersten Zeilen der Reihe nach je mit den Elementen der vierten Zeile von D_b multipliziert denkt usw., ebenso die $(n+5)$-te, die $(n+6)$-te Zeile usw.,

so kommt man schließlich zur $2n$-ten Zeile, deren Elemente dann heißen werden:

$$\begin{aligned}
a_{11}b_{n1} + a_{21}b_{n2} + \dots + a_{n1}b_{nn} &= \Sigma a_{i1}b_{ni} \\
a_{12}b_{n1} + a_{22}b_{n2} + \dots + a_{n2}b_{nn} &= \Sigma a_{i2}b_{ni} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
a_{1n}b_{n1} + a_{2n}b_{n2} + \dots + a_{nn}b_{nn} &= \Sigma a_{in}b_{ni};
\end{aligned}$$

alle übrigen Null.

Die so umgeformte Determinante für $D_1 \cdot D_2$ hat somit folgendes Aussehen:

$$\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & -1 & 0 & \dots & 0 \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & -1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & -1 \\
\Sigma a_{i1}b_{1i} & \Sigma a_{i2}b_{1i} & \dots & \Sigma a_{in}b_{1i} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\Sigma a_{i1}b_{2i} & \Sigma a_{i2}b_{2i} & \dots & \Sigma a_{in}b_{2i} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\Sigma a_{i1}b_{ni} & \Sigma a_{i2}b_{ni} & \dots & \Sigma a_{in}b_{ni} & 0 & 0 & \dots & 0
\end{vmatrix}.$$

Diese Determinante läßt sich sofort in das Produkt zweier Determinanten zerlegen:

$$(-1)^k \begin{vmatrix}
\Sigma a_{i1}b_{1i} & \dots & \Sigma a_{in}b_{1i} \\
\dots & \dots & \dots \\
\Sigma a_{i1}b_{ni} & \dots & \Sigma a_{in}b_{ni}
\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}
-1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & -1 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & -1
\end{vmatrix}.$$

Die zweite Determinante hat den Wert $(-1)^n$; es gilt nun, k zu bestimmen. k gibt die Summe der Zahlen an, welche die Zeilen und Kolonnen charakterisieren, die unterdrückt werden müssen, damit die aus jenen Summen

gebildete Unterdeterminante übrigbleibt. Es kommen die $1, 2, \ldots, n$-te Zeile und $(n+1), (n+2), \ldots, 2n$-te Kolonne in Betracht, so daß

$$k = \frac{n}{2}(n+1) + n^2 + \frac{n}{2}(n+1) = n + 2n^2,$$

folglich ist

$$(-1)^k = (-1)^{n+2n^2},$$
$$(-1)^k \cdot (-1)^n = (-1)^{2n+2n^2} = +1.$$

Man kommt also zu dem Ergebnis, daß das Produkt $D_a \cdot D_b$ sich auf die aus jenen Summen gebildete Determinante reduziert.

Vertauscht man in dieser Summendeterminante noch die Zeilen mit den Kolonnen, so hat man:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} \Sigma a_{i1} b_{1i} & \Sigma a_{i1} b_{2i} & \ldots & \Sigma a_{i1} b_{ni} \\ \Sigma a_{i2} b_{1i} & \Sigma a_{i2} b_{2i} & \ldots & \Sigma a_{i2} b_{ni} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma a_{in} b_{1i} & \Sigma a_{in} b_{2i} & \ldots & \Sigma a_{in} b_{ni} \end{vmatrix}.$$

In dieser Form läßt sich das Gesetz der Bildung der Produktdeterminante recht gut erkennen. Die vier Indizes unter dem Summenzeichen eines jeden Elementes folgen derart aufeinander, daß der erste und letzte i ist, und daß die beiden inneren diejenigen sind, welche in D_a oder D_b das entsprechende Element an derselben Stelle besitzt.

Sind somit zwei numerisch gegebene Determinanten D_1 und D_2 vorgelegt, dann wird irgend ein Element der

Produktdeterminante, z. B. das der r-ten Zeile und der s-ten Kolonne, dadurch gebildet, daß man das erste Element der r-ten Zeile von D_1 multipliziert mit dem ersten Element der s-ten Kolonne von D_2, dann das zweite Element der r-ten Zeile von D_1 mit dem zweiten Element der s-ten Kolonne von D_2 usw., schließlich das n-te Element der r-ten Zeile von D_1 mit dem n-ten Element der s-ten Kolonne von D_2 und alle diese Produkte addiert.

In der obigen Determinante D_a können ohne weiteres die ersten mit den zweiten Indizes vertauscht werden; dasselbe darf man dann natürlich auch in der Produktdeterminante tun, so daß auch ist:

$$D_a \cdot D_b = \begin{vmatrix} \Sigma a_{1i} b_{1i} & \Sigma a_{1i} b_{2i} & \dots & \Sigma a_{1i} b_{ni} \\ \Sigma a_{2i} b_{1i} & \Sigma a_{2i} b_{2i} & \dots & \Sigma a_{2i} b_{ni} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma a_{ni} b_{1i} & \Sigma a_{ni} b_{2i} & \dots & \Sigma a_{ni} b_{ni} \end{vmatrix}.$$

In dieser Form, die Summen natürlich ausgeführt, findet man die Produktdeterminante auch recht oft angegeben.

Hiernach erhält man in der Produktdeterminante das erste Element der ersten Zeile, indem man die Elemente der ersten Zeile von D_a einzeln mit den entsprechenden Elementen der ersten Zeile von D_b multipliziert und addiert; das zweite Element der ersten Zeile wird gefunden, indem man wieder die Elemente der ersten Zeile in D_a einzeln mit den entsprechenden Elementen der zweiten Zeile in D_b multipliziert und addiert usw. Entsprechend gestaltet sich die Bildung der übrigen Elemente der ersten Zeile in der Produktdeterminante. Die Elemente der zweiten Zeile bekommt man in derselben Weise, indem man die Elemente der zweiten Zeile von D_a mit den Elementen der einzelnen Zeilen in D_b kombiniert usw.

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+3b & 2a+4b \\ c+3d & 2c+4d \end{vmatrix} \qquad \text{(I. Art)}$$

$$= 2ac + 6bc + 4ad + 12bd - 2ac - 6ad - 4bc - 12bd$$

$$= 2bc - 2ad = 2(bc - ad)$$

$$= \begin{vmatrix} a+2b & c+2d \\ 3a+4b & 3c+4d \end{vmatrix} \qquad \text{(II. Art)}$$

$$= 3ac + 6bc + 4ad + 8bd - 3ac - 4bc - 6ad - 8bd$$

$$= 2bc - 2ad = 2(bc - ad)\,.$$

Hat man mehrere Determinanten miteinander zu multiplizieren, so kann man zunächst die beiden ersten multiplizieren und dann diese Produktdeterminante mit der dritten usw., so daß man allgemein sagen kann:

Sind beliebig viele Determinanten miteinander zu multiplizieren, so läßt sich ihr Produkt als eine einzige Determinante darstellen, welche dieselbe Ordnung aufweist wie diejenige der gegebenen Determinanten, welche von der höchsten Ordnung ist. Die Elemente der Produktdeterminante sind ganze rationale Funktionen der Elemente der gegebenen Determinanten.

Schließlich mag noch hervorgehoben werden, daß Binet und Cauchy die Multiplikationsregel für Determinanten zum ersten Male ausgesprochen haben; beide Mathematiker haben fußen können auf besondere Fälle, die bereits von Lagrange und Gauß angegeben waren.

III. Besondere Determinanten.

§ 10. **Berechnung einiger spezieller Determinanten.**

1. $$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}.$$

[illegible] der drei letzten Zeilen [illegible] Zeile gibt für jedes [illegible], so daß also D durch [illegible] Führt man dieselbe [illegible] vorher die Elemente der [illegible] mit (-1) multipliziert [illegible]minante ihrem Werte nach [illegible] man weiterhin den Faktor [illegible] läßt die Multiplikation [illegible] und Kolonne mit (-1) den [illegible] die der ersten und vierten [illegible] Faktor $(a-b-c+d)$ [illegible] ist, so muß sein:

$$[illegible]-b-c-d)(a-b-c+d).$$

[illegible] 1

[illegible] 5

[illegible] 15

[illegible] 35

[illegible] 70

[illegible] fünf Zahlen der [illegible] 3-ter, 4-ter Ord- [illegible] Zeile um die vorher-

[illegible] 1

[illegible] 4

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Führt man dasselbe wie vorher nochmals an den letzten drei Zeilen usw. aus, so erhält man ferner:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\,.$$

Man sieht, daß man dieses Prinzip ganz allgemein auf eine Determinante n-ten Grades anwenden kann, deren n Elemente der i-ten Zeile und der i-ten Kolonne die n ersten Glieder der figurierten Reihe der $(i-1)$-ten Ordnung sind; diese Determinante hat immer den Wert 1. Nun hat die n-te figurierte Zahl k-ter Ordnung den Wert

$$\binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1},$$

so daß jetzt die Determinante aus den n ersten figurierten Zahlen von 0-ter bis $(n-1)$-ter Ordnung heißt:

$$\begin{vmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \cdots & \binom{n-1}{0} \\ \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \binom{2}{2} & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \cdots & \binom{n+1}{2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \binom{n-1}{n-1} & \binom{n}{n-1} & \binom{n+1}{n-1} & \cdots & \binom{2n-1}{n-1} \end{vmatrix} = 1\,.$$

[illegible] Determinanten, in denen ebenfalls die Elemente [illegible] der Form [illegible] sind, haben Zeipel, Stern und [illegible]

[illegible]

[illegible] der ersten Zeile um die [illegible] 4 vor die Deter- [illegible]

[illegible]

[illegible] der zweiten Kolonne [illegible] durch Ver- [illegible] der vierten, [illegible] der fünften [illegible]

4. Folgende Determinante rührt von Hermite her:

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & -b_0 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & -b_1 & b_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -b_{n-2} & b_n \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -b_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Durch Multiplikation der ersten Zeile mit b_0, der zweiten mit b_1 usw., der letzten mit b_n und durch Addition aller folgenden Zeilen zu jeder Zeile ergibt sich eine Determinante, deren Elemente oberhalb der Hauptdiagonale verschwinden, so daß:

$$b_0 \cdot b_1 \dots b_n \cdot D$$
$$= (a_0 b_0 + a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)(-1)^n b_0 b_1 b_1 b_2 \dots b_{n-1} b_n,$$
$$D = (-1)^n (a_0 b_0 + \dots + a_n b_n) b_1 b_2 \dots b_{n-1}.$$

5. $$D = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+x & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+x \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11}+x)(a_{22}+x)(a_{33}+x) + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-(a_{22}+x)a_{13}\cdot a_{31} - (a_{11}+x)a_{23}a_{32} - (a_{33}+x)a_{12}a_{21}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ x\left\{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\right\}$$

$$+ x^2(a_{11} + a_{22} + a_{33}) + x^3.$$

Diese Determinante ist ein Sonderfall von der allgemeineren (Jacobi):

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} + z & \dots & a_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} + z \end{vmatrix},$$

die sich ebenfalls nach Potenzen von z entwickeln läßt, und zwar derart, daß der Koeffizient D_{n-m} von z^m die Summe aller möglichen Hauptunterdeterminanten von

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ist, deren Grad zu m addiert n ergibt:

$$D = D_n + D_{n-1} z + D_{n-2} z^2 + \dots + D_1 z^{n-1} + D_0 \cdot z^n,$$

wo z. B. $D_1 = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ und $D_0 = 1$.

6. $$D = \begin{vmatrix} a_{11} + z & \dots & a_{1n} + z \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} + z & \dots & a_{nn} + z \end{vmatrix}.$$

Durch Anwendung vom 10. Satz § 6 kann man D in folgende Determinanten zerlegen, falls man bedenkt, daß Determinanten mit gleichen Kolonnen verschwinden:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & z & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & z & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & z \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & z \end{vmatrix}.$$

Jede dieser Determinanten, außer der ersten, denkt man sich nach Unterdeterminanten der Elemente derjenigen Kolonnen entwickelt, in denen z steht; auf diese Weise

erhält man z multipliziert mit der Summe aller möglichen $(n-1)$-gliedrigen Unterdeterminanten:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + z \sum_{ik} A_{ik} .$$

7. Einen Spezialfall von (6) stellt dar:

$$D = \begin{vmatrix} z + a_{11} & z & z & \dots & z \\ z & a_{22} + z & z & \dots & z \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z & z & z & \dots & a_{nn} + z \end{vmatrix}$$
$$= a_{11} a_{22} \dots a_{nn} + z \sum_{ik} A_{ik} .$$

Die Summe reduziert sich jetzt auf die n möglichen Produkte aus je $n-1$ der Elemente $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, so daß man bei Ausklammerung von $z \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$ erhält:

$$D = z \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{a_{11}} + \frac{1}{a_{22}} + \dots + \frac{1}{a_{nn}} \right) .$$

8. Beispiel für Anwendung von Rekursionsformeln:

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & a & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & a & 1 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 1 & a \end{vmatrix} .$$

Durch Entwicklung nach Unterdeterminanten der ersten Kolonne wird:

$$D_n = a \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & . & . & . \\ 1 & a & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . \\ 1 & a & 1 & . & . & . \\ 0 & 1 & a & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & a \end{vmatrix}.$$

Die erste Determinante ist dieselbe wie D_n, nur hat sie eine Zeile und Kolonne weniger, sie sei D_{n-1}; die zweite reduziert sich auf die Unterdeterminante des ersten Elementes der ersten Zeile, welche dann wieder dieselbe Determinante wie D_n ist, nur daß sie zwei Zeilen und Kolonnen weniger hat, sie sei D_{n-2}. Dann ist $D_n = a D_{n-1} - D_{n-2}$. Da aber $D_1 = a$ und $D_2 = a^2 - 1$, so ist jedes beliebige D_n angebbar.

Für $a = 1$ nimmt die Determinante die Werte 0, $+1$ oder -1 an und zwar $D_{2+3k} = 0$ für beliebige k und $D_{2+3k+1} = D_{2+3k+2} = \pm 1$, je nachdem k gerade oder ungerade ist.

§ 11. Vandermondesche Determinante.

Besondere Erwähnung verdient die folgende Determinante, auch Potenzdeterminante genannt, da sie für die ganze Entwicklung der Determinantentheorie von Wichtigkeit ist. Vandermonde und Cauchy haben sie besonders untersucht.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Addiert man die mit -1 multiplizierten Elemente der zweiten Zeile zu den entsprechenden der ersten, so sieht man, daß D den Faktor $(a_1 - a_2)$ haben muß. Dasselbe kann man mit allen möglichen Paaren $\left(\text{ihre Anzahl ist } \frac{n}{2}(n-1)\right)$ von je zwei Zeilen tun, so daß man $\frac{n}{2}(n-1)$ Faktoren $a_i - a_k$ vor die Determinante setzen kann. D kann sich von dem Produkt dieser Faktoren nur um einen Zahlenfaktor k unterscheiden, denn aus der Determinante selbst sieht man, daß jedes einzelne Glied der Entwicklung von der Dimension $\frac{n}{2}(n-1)$ sein muß. Dann ist also:

$$\begin{aligned} D = k \cdot (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4) \ldots (a_1 - a_n) \\ (a_2 - a_3)(a_2 - a_4) \ldots (a_2 - a_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (a_{n-1} - a_n)\,. \end{aligned}$$

Hiernach ist k der Koeffizient von

$$a_1^{n-1}\, a_2^{n-2} \ldots a_{n-1}\,.$$

In der entwickelten Determinante ist dieses Produkt das der Nebendiagonalglieder, also mit dem Vorzeichen von $(-1)^{\frac{n}{2}(n-1)}$ versehen; somit ist

$$k = (-1)^{\frac{n}{2}(n-1)}\,.$$

Kehrt man jede einzelne Differenz um, so kann geschrieben werden:

$$D = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \ldots (a_n - a_1) \ldots (a_n - a_{n-1})\,.$$

Dieses **Differenzenprodukt** schreibt man auch:

$$D = \Pi(a_i - a_j) \quad \text{(für alle } i > j \text{ von 1 bis } n).$$

Die Vandermondesche Determinante ist wichtig geworden für die Untersuchungen über **alternierende Funktionen**, womit Cauchy solche bezeichnet hat, die bei beliebiger Permutation der Elemente entweder unverändert bleiben oder den entgegengesetzten Wert annehmen. Die einfachste alternierende Funktion ist das obige Differenzenprodukt.

Cauchy hat gezeigt, daß jede ganze alternierende Funktion von irgendwelchen Elementen das Differenzenprodukt derselben Elemente als Faktor aufweist. Man erkennt dies daraus, daß durch die gegenseitige Vertauschung irgend zweier Elemente die Funktion den entgegengesetzten Wert annimmt, daß sie also verschwindet, falls die beiden betreffenden Elemente einander gleich sind. Hieraus schließt man, daß die Funktion durch die Differenz der beiden Elemente, also weiterhin durch das Produkt aller Differenzen teilbar ist. Dividiert man eine solche ganze alternierende Funktion durch das Differenzenprodukt der Elemente, so ergibt sich entweder eine von den Elementen unabhängige Zahl, oder eine **symmetrische Funktion** der Elemente, welche die Eigenschaft hat, daß sie bei jeder beliebigen Vertauschung der Elemente ungeändert bleibt.

Es muß noch hervorgehoben werden, daß aus den bekannten Eigenschaften der Determinanten, als welche das Differenzenprodukt geschrieben werden kann, ähnliche Eigenschaften für dieses Differenzenprodukt folgen. Umgekehrt hat man, besonders Cauchy, die Determinanten aus dem Differenzenprodukt hergeleitet und die Eigenschaften des letzteren auf die Determinanten übertragen. Zu diesem Zweck schreibt man die obige Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^0 & a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ a_2^0 & a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^0 & a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

oder indem man statt der unteren Indizes: $1, 2, 3, \dots, n$ die folgenden nimmt: $0, 1, 2, \dots, n-1$:

$$\begin{vmatrix} a_0^0 & a_0^1 & a_0^2 & \dots & a_0^{n-1} \\ a_1^0 & a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1}^0 & a_{n-1}^1 & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

In dieser Form hat man noch das Differenzenprodukt; sieht man aber die Exponenten (vgl. die Schlußbemerkung in § 4) als Indizes an, so hat man sofort die allgemeine Form der Determinante.

Jacobi meint aber, daß es richtiger wäre, die Entwicklung des Differenzenproduktes dadurch zu erklären, daß es sich wie eine Determinante verhält.

§ 12. Reziproke Determinanten.

Ist ein System von n^2 Größen gegeben:

$$\begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{matrix},$$

so kann man ihm ein anderes zuordnen, indem man von

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

die $(n-1)$-gliedrigen Unterdeterminanten bestimmt und diese zu folgendem System anordnet:

$$\begin{matrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{matrix}.$$

Die Determinante dieses Systems, also die Determinante der Unterdeterminanten $(n-1)$-ter Ordnung, nennt man die reziproke Determinante von D. Solche Deter-

minanten spezieller Art hatten schon Lagrange und Gauß untersucht; die allgemeinen Untersuchungen rühren von Cauchy und Jacobi her.

Ist:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \varDelta = \begin{vmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ A_{n1} & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix},$$

so lautet das Element der i-ten Zeile und k-ten Kolonne der Produktdeterminante $D \cdot \varDelta$:

$$c_{ik} = a_{i1} A_{k1} + a_{i2} A_{k2} + \ldots + a_{in} A_{kn}.$$

Nach S. 53 ist c_{ik} gleich Null oder D, je nachdem $i \neq k$ oder $i = k$. Hiernach wird:

$$D \cdot \varDelta = \begin{vmatrix} D & 0 & 0 & \ldots & . \\ 0 & D & 0 & \ldots & . \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & D \end{vmatrix},$$

also:

$$\varDelta = D^{n-1}.$$

Im Anschluß hieran mag jetzt die reziproke Determinante zu $\varDelta_{\left\{\begin{smallmatrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ \cdot & \cdot \\ \alpha_m & \beta_m\end{smallmatrix}\right\}}$ bestimmt werden, sie heiße $\mathrm{A}_{\left\{\begin{smallmatrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ \cdot & \cdot \\ \alpha_m & \beta_m\end{smallmatrix}\right\}}$.

Zu diesem Zweck stellt man D so um, daß die α_1-te, α_2-te, ..., die α_m-te Zeile die m ersten Zeilen und daß die β_1-te, β_2-te, ..., β_m-te Kolonne die m ersten Kolonnen bilden; die übrigen Zeilen und Kolonnen behalten ihre Reihenfolge zueinander ($\Sigma\alpha + \Sigma\beta$ Zeichenwechsel!). Mit dieser so veränderten Determinante D multipliziert man

die reziproke Determinante $\mathsf{A}_{\left\{\begin{smallmatrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ \cdot & \cdot \\ \alpha_m & \beta_m\end{smallmatrix}\right\}}$, jedoch auf den n-ten Grad erweitert:

$$\left|\begin{array}{ccccc} A_{\alpha_1\beta_1} & \dots & A_{\alpha_1\beta_m} & X_{11} & \dots & X_{1,n-m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{\alpha_m\beta_1} & \dots & A_{\alpha_m\beta_1} & X_{m1} & \dots & X_{m,n-m} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right|,$$

wobei die Größen X die übrigen Größen A aus der α_1-ten, α_2-ten, ..., α_m-ten Zeile von Δ sind.

Das Ergebnis ist:

$$(-1)^{\Sigma\alpha+\Sigma\beta}\cdot D\cdot \mathsf{A}_{\left\{\begin{smallmatrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ \cdot & \cdot \\ \alpha_m & \beta_m\end{smallmatrix}\right\}}$$

$$= \left|\begin{array}{ccccccc} D & 0 & \dots & 0 & x_{11} & \dots & x_{1,n-m} \\ 0 & D & \dots & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & D & x_{m1} & \dots & x_{m,n-m} \\ 0 & & \dots & 0 & x_{m+1,1} & \dots & x_{m+1,n-m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & \dots & 0 & x_{n1} & \dots & x_{n,n-m} \end{array}\right|,$$

wobei die Größen x die Elemente der oben umgestellten Determinante D sind, welche in den letzten $(n-m)$ Kolonnen stehen. Die letzte Determinante zerfällt in das Produkt

$$D^m\cdot\left|\begin{array}{ccc} x_{m+1,1} & \dots & x_{m+1,n-m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \dots & x_{n,n-m} \end{array}\right|,$$

wobei die Determinante der x das Komplement zu $A_{\left\{\begin{smallmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \cdot & \cdot\\ \alpha_m & \beta_m\end{smallmatrix}\right\}}$ in D ist; sonach wird:

$$\mathsf{A}_{\left\{\begin{smallmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \cdot & \cdot\\ \alpha_m & \beta_m\end{smallmatrix}\right\}} = (-1)^{\Sigma\alpha+\Sigma\beta} D^{m-1} a_{\left\{\begin{smallmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \cdot & \cdot\\ \alpha_m & \beta_m\end{smallmatrix}\right\}}.$$

Beispiele:

a) Es ist der Koeffizient von A_{ik} in Δ:

$$(-1)^{i+k} D^{n-2} a_{ik}.$$

b) Sind die Elemente in D voneinander unabhängige Variable, so ist:

$$\begin{vmatrix} A_{ik} & A_{is} \\ A_{rk} & A_{rs} \end{vmatrix} = D \cdot \frac{\partial^2 D}{\partial a_{ik}\, \partial a_{rs}}$$

oder

$$\frac{\partial D}{\partial a_{ik}} \cdot \frac{\partial D}{\partial a_{rs}} - \frac{\partial D}{\partial a_{rk}} \cdot \frac{\partial D}{\partial a_{is}} = D \cdot \frac{\partial^2 D}{\partial a_{ik}\, \partial a_{rs}}.$$

c)

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{15} \\ a_{51} & \cdots & a_{55} \end{vmatrix}; \qquad \Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{15} \\ A_{51} & \cdots & A_{55} \end{vmatrix};$$

$$A_{\left\{\begin{smallmatrix}12\\24\\35\end{smallmatrix}\right\}} = -\begin{vmatrix} a_{41} & a_{43} \\ a_{51} & a_{53} \end{vmatrix}; \qquad \mathsf{A}_{\left\{\begin{smallmatrix}12\\24\\35\end{smallmatrix}\right\}} = -D^3 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{32} & a_{34} & a_{35} \end{vmatrix}.$$

§ 13. Symmetrische, schiefsymmetrische und pseudosymmetrische Determinanten.

Unter symmetrischen Determinanten versteht man solche, bei denen konjugierte Elemente einander gleich sind, also solche (nach S. 73) wie a_{ik} und a_{ki} (vgl. die Determinanten 1, 2, 3, 7, 8 in § 10).

Nach dem Multiplikationstheorem ist z. B. das Quadrat jeder Determinante eine symmetrische Determinante.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{vmatrix}.$$

Jede Hauptunterdeterminante einer symmetrischen Determinante ist selbst wieder symmetrisch, und zwei konjugierte Unterdeterminanten einer solchen sind einander gleich. Daraus folgt wieder, daß die reziproke Determinante einer symmetrischen Determinante selbst wieder symmetrisch ist.

Hat die symmetrische Determinante die besondere Eigenschaft, daß für beliebige q ihrer Elemente ist:

$$a_{ik} = a_{i \pm q, k \pm q}$$

oder

$$a_{ik} = a_{i \pm q, k \mp q},$$

so nannte sie Hankel orthosymmetrisch, Sylvester persymmetrisch, Frobenius rekurrierend.

Beispiele:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n+1} \\ a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \dots & a_{2n-1} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} b & a & 0 & d \\ a & 0 & d & a \\ 0 & d & a & 1 \\ d & a & 1 & c \end{vmatrix}.$$

Sind die eben genannten Determinanten so beschaffen, daß alle Zeilen dieselben Elemente aufweisen und zwar derart, daß jede Zeile durch eine zyklische Vertauschung der Elemente aus der vorhergehenden entsteht, so hat man die zyklischen Determinanten oder Zirkulanten; man findet auch die Bezeichnung doppelt-

orthosymmetrische Determinanten. Sie spielen bei gewissen Fragen der Zahlentheorie eine Rolle.

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix} .$$

Sind in einer Determinante die konjugierten Elemente entgegengesetzt gleich, also

$$a_{ik} = -a_{ki}$$

und dementsprechend

$$a_{11} = a_{22} = a_{ii} = a_{kk} = \dots = a_{nn} = 0 ,$$

so nennt man die Determinante schiefsymmetrisch, halbsymmetrisch, hemisymmetrisch. Man findet auch die Bezeichnung überschlagene oder symmetrale Determinanten mit verschwindenden Hauptdiagonalelementen.

Eine schiefsymmetrische Determinante von ungerader Ordnung ist Null, eine solche von gerader Ordnung ein Quadrat.

Multipliziert man alle Kolonnen einer $(2m+1)$-gliedrigen schiefsymmetrischen Determinante D bezüglich aller Elemente mit (-1), so erreicht man nur eine Vertauschung der Zeilen mit den Kolonnen; andrerseits müßte aber die Determinante ihr Vorzeichen geändert haben. Es müßte also sein $D = -D$, was nur für $D = 0$ richtig ist.

Der Beweis des zweiten Teiles mag nur angedeutet werden; die § 12 Beispiel b) gegebene Formel redu-

ziert sich unter den jetzigen Bedingungen einer schiefsymmetrischen Determinante auf

$$\left(\frac{\partial D}{\partial a_{ir}}\right)^2 = D\,\frac{\partial^2 D}{\partial a_{ii}\,\partial a_{rr}}, \quad \text{falls } i = k \text{ und } r = s.$$

Hiernach ist D ein Quadrat, sobald jede ihrer Hauptunterdeterminanten von einem um zwei Einheiten niederen Grad ein solches ist. Da aber jede zweigliedrige schiefsymmetrische Determinante ein Quadrat ist, muß jede geradgliedrige schiefsymmetrische Determinante ein Quadrat sein.

Beispiele:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 0; \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -d \\ a & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & f \\ d & e & -f & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -a \begin{vmatrix} -a & -b & -d \\ c & 0 & f \\ e & -f & 0 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} -a & -b & -d \\ 0 & -c & -e \\ e & -f & 0 \end{vmatrix}$$

$$- d \begin{vmatrix} -a & -b & -d \\ 0 & -c & -e \\ c & 0 & f \end{vmatrix} = (af + be - cd)^2 .$$

Pseudosymmetrische oder schiefe Determinanten hat man vor sich, sobald die Hauptelemente nicht verschwinden, alle konjugierten Elemente aber entgegengesetzt gleich sind.

Es mag nur auf den Spezialfall näher eingegangen werden, daß alle Hauptelemente untereinander gleich sind. Nach einem früheren Beispiel § 10 (5) läßt sich

$$D = \begin{vmatrix} x & -a_{12} & -a_{13} & \dots & -a_{1n} \\ a_{12} & x & -a_{23} & \dots & \dots \\ a_{13} & a_{23} & x & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & \dots & \dots & x \end{vmatrix}$$

nach Potenzen von x entwickeln. In dieser Entwicklung müssen das von x freie Glied und alle Unterdeterminanten schiefsymmetrische Determinanten sein ($a_{11} = \dots = a_{nn} = 0$). Folglich müssen alle von ungerader Ordnung verschwinden und diejenigen gerader Ordnung Quadrate sein.

Ist also D von gerader Ordnung, so bleiben nur Glieder mit geraden Potenzen von x übrig, jede Potenz mit einer Summe von Quadraten multipliziert, so daß also D in eine Summe von Quadraten zerlegbar ist.

Ist D von ungerader Ordnung, so läßt sich x aus der ganzen Entwicklung ausklammern, und es bleibt wieder eine Summe von Quadraten zurück, so daß sich also D ebenfalls in eine Summe von Quadraten zerlegen läßt, falls $x = 1$ ist.

Eine besondere Gruppe der pseudosymmetrischen Determinanten sind die Kontinuanten; die Hauptdiagonale enthält hier beliebige Elemente, alle andern verschwinden, mit Ausnahme der beiden zur Hauptdiagonale parallelen und benachbarten schiefen Reihen, welche auf der einen Seite nur Elemente vom Wert 1, auf der andern vom Wert -1 enthalten:

$$D = (a_1\, a_2 \ldots a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & a_2 & -1 & 0 & \ldots & 0. \\ 0 & 1 & a_3 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_4 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix}.$$

Benutzt man die angegebene Abkürzung, so gibt die Entwicklung nach Unterdeterminanten die Rekursionsformel:

$$(a_1\, a_2 \ldots a_n) = a_1 (a_2 \ldots a_n) + (a_3 \ldots a_n)$$

oder

$$= a_n (a_1 \ldots a_{n-1}) + (a_1 \ldots a_{n-2}),$$

wonach das Bildungsgesetz sich erkennen läßt.

Die Kontinuanten haben diesen Namen wegen ihrer Beziehungen zur Theorie der Kettenbrüche.

§ 14. **Funktionaldeterminanten.**

In der Einleitung wurde gezeigt, wie Jacobi durch seine Abhandlung „Über die Bildung und Eigenschaften der Determinanten“ dazu beigetragen hatte, daß die Determinanten zu einem unentbehrlichen Werkzeug der Mathematiker wurden. Jener Abhandlung ließ Jacobi unmittelbar eine andere folgen: „Über die Funktionaldeterminanten“ *), worin er sich auf die erstere stützt und darauf eine selbständige, neue Theorie aufbaut. Im folgenden mag kurz auf diese Theorie eingegangen werden, da es sich dabei, wie Stäckel sagt, um eine Anwendung der Determinanten von solcher Fruchtbarkeit handelt, daß es wohl kein Gebiet der

*) Ostwalds Klassiker, Nr. 78.

höheren Analysis gibt, in dem man der „Jacobischen Determinante“ nicht begegnet.

Sind n Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ vorgelegt, von denen jede die n Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aufweist:

$$\begin{aligned} f_1 &= f_1(x_1 x_2 \ldots x_n) \\ f_2 &= f_2(x_1 x_2 \ldots x_n) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ f_n &= f_n(x_1 x_2 \ldots x_n)\,, \end{aligned}$$

so kann man jede Funktion partiell nach den einzelnen Variabeln differentiieren:

$$\begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{matrix}\,.$$

Die Determinante dieses Systems von n^2 partiellen Differentialquotienten nennt Jacobi die

Funktionaldeterminante,

oder genauer die Determinante, die zu den Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ der Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gehört, oder die in bezug auf die Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gebildete Determinante der Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Analog seiner früheren Bezeichnungsweise einer Determinante schreibt sie Jacobi:

$$\sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\,.$$

Nach Kronecker könnte man schreiben:

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right| \qquad (\text{für } i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Cauchy nannte sie analog seiner Bezeichnungsweise der Determinanten „fonctions différentielles alternées“.

Sylvester nannte sie zu Ehren Jacobis „Jacobians“ und schrieb dafür:

$$J(f_1, f_2, \ldots, f_n).$$

Dann findet man noch die Schreibweisen:

$$f_x \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \quad \text{oder schließlich} \quad \frac{\partial (f_1 \ldots f_n)}{\partial (x_1 \ldots x_n)}.$$

Die letzte Schreibweise rührt von Donkin her; er wollte durch sie andeuten, daß die Sätze über Funktionaldeterminanten eine auffallende Ähnlichkeit mit bekannten Differentialformeln zeigen und sich als deren Erweiterung betrachten lassen.

Ist im besonderen

$$f_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad (\text{für } i = 1, 2, \ldots, n),$$

so nennt man die Funktionaldeterminante die „Hessesche Determinante“ und bezeichnet sie mit

$$H(F) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}.$$

Man erkennt z. B. $H(F)$ sofort als symmetrische Determinante der zweiten partiellen Differentialquotienten.

Ist F eine ganze homogene Funktion zweiten Grades der n Variabeln $x_1, \ldots, x_n$, so sind die n Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ linear, und die mit (-1) multiplizierte Funktionaldeterminante wird die „Determinante der Form" genannt.

Für

$$f_i = \sum_k a_{ik} x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

geht die Funktionaldeterminante über in die Determinante

$$J = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Die Sätze, die also für Funktionaldeterminanten gelten, werden im besonderen auch für die gewöhnlichen Determinanten Geltung haben.

Der Grad einer Funktionaldeterminante wird sich verringern, sobald mehrere der gegebenen Funktionen einzelnen Variabeln gleich sind. So hat z. B. für

$$f_1 = f_1(x_1 \ldots x_n), \ \ldots, \ f_m = f_m(x_1 \ldots x_n),$$
$$f_{m+1} = x_{m+1}, \ f_{m+2} = x_{m+2}, \ \ldots, \ f_n = x_n$$

die Funktionaldeterminante den Wert

$$J = \sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial f_m}{\partial x_m}.$$

Im besonderen hat die Funktionaldeterminante den Wert 1, wenn

$$f_1 = x_1, \ f_2 = x_2, \ \ldots, \ f_n = x_n.$$

Sind die Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_m$ abhängig von allen Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$, jedoch die Funktionen $f_{m+1}, f_{m+2}, \ldots, f_n$ nur von $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$, so

folgt aus dem Bildungsgesetz und aus den Betrachtungen S. 74, daß

$$J = \sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

$$= \sum \pm \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \sum \pm \frac{\partial f_{m+1}}{\partial x_{m+1}} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

denn

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{m+1}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} & \frac{\partial f_m}{\partial x_{m+1}} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial f_{m+1}}{\partial x_{m+1}} & \cdots & \frac{\partial f_{m+1}}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial f_n}{\partial x_{m+1}} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Der wichtigste Grundsatz über Funktionaldeterminanten ist folgender:

Die Funktionaldeterminante der n Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ verschwindet, sobald die Funktionen f voneinander abhängig sind, sobald also eine Bedingung

$$F = F(f_1, f_2, \ldots, f_n) = 0$$

existiert.

Der Satz ergibt sich ohne weiteres daraus, daß folgende n Gleichungen:

$$\frac{\partial F}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \frac{\partial F}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_k} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial f_n}\frac{\partial f_n}{\partial x_k} = 0$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

gleichzeitig für die n Größen $\frac{\partial F}{\partial f_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ bestehen müssen; abgesehen von dem Fall, daß alle $\frac{\partial F}{\partial f_i}$ verschwinden, was gegen die Voraussetzung ist, kann das gleichzeitige Bestehen, wie im nächsten Paragraphen gezeigt wird, nur stattfinden, wenn die Determinante der Koeffizienten der $\frac{\partial F}{\partial f_i}$, also die Funktionaldeterminante der f verschwindet.

Sind die Funktionen f solche der Variablen y, die selbst wieder Funktionen der unabhängigen Variablen x sind, so kann man von jedem f die Ableitung nach jedem x, also im ganzen n^2 bilden:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \frac{\partial f_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \frac{\partial f_i}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_k} + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_k}$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Die Funktionaldeterminante aus den Elementen $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ ist dann eine Produktdeterminante:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Falls nur eine Funktion f von y vorliegt, wobei $y = y(x)$, so entspricht dies dem bekannten Satz in der Differentialrechnung:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Vgl. das obige Ergebnis in der Schreibweise:

$$\frac{\partial(f_1 \dots f_n)}{\partial(x_1 \dots x_n)} = \frac{\partial(f_1 \dots f_n)}{\partial(y_1 \dots y_n)} \cdot \frac{\partial(y_1 \dots y_n)}{\partial(x_1 \dots x_n)}.$$

Schreibt man diese letzte Formel:

$$\frac{\partial(f_1 \dots f_n)}{\partial(y_1 \dots y_n)} = \frac{\partial(f_1 \dots f_n)}{\partial(x_1 \dots x_n)} : \frac{\partial(y_1 \dots y_n)}{\partial(x_1 \dots x_n)},$$

so hat man das Analogon zu der bekannten Formel:

$$\frac{df}{dy} = \frac{df}{dx} : \frac{dy}{dx}.$$

IV. Anwendungen der Determinanten:

§ 15. Auf algebraische Probleme.

In der Einleitung wurde bereits erwähnt, daß die Determinantentheorie ihre Entstehung der Auflösung von linearen Gleichungen verdankt. Es mag im folgenden auf diese wichtigste Anwendung der Determinanten kurz eingegangen werden.

Vorgelegt sei folgendes System von n linearen Gleichungen mit den n Unbekannten $x_1 \dots x_n$:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= m_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= m_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n &= m_n. \end{aligned}$$

Man nennt:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

die Determinante des Systems.

Multipliziert man die einzelnen Gleichungen mit den Unterdeterminanten der Elemente der ersten Kolonne von D und zwar so, daß die erste Gleichung mit A_{11}, die zweite mit A_{21} usw., die letzte mit A_{n1} multipliziert wird, und addiert man die so erhaltenen n Gleichungen, so bekommt man:

$$\begin{aligned} & x_1 (a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + \dots + a_{n1} A_{n1}) \\ + & x_2 (a_{12} A_{11} + a_{22} A_{21} + \dots + a_{n2} A_{n1}) \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ + & x_n (a_{1n} A_{11} + a_{2n} A_{21} + \dots + a_{nn} A_{n1}) \\ = & m_1 A_{11} + m_2 A_{21} + \dots + m_n A_{n1}\,. \end{aligned}$$

Analog der früheren Bezeichnungsweise (§ 7) kann diese Gleichung kürzer geschrieben werden:

$$\begin{aligned} x_1 \sum_i a_{i1} A_{i1} + x_2 \sum_i a_{i2} A_{i1} + \dots \\ + x_n \sum_i a_{in} A_{i1} = \sum_i m_i A_{i1}\,, \end{aligned}$$

wobei über alle möglichen $i = 1, 2, \dots, n$ zu summieren ist. Alle Summen auf der linken Seite sind nun außer der ersten Null (vgl. Satz 6, § 7), so daß:

$$x_1 \sum_i a_{i1} A_{i1} = \sum_i m_i A_{i1}\,.$$

Ferner erhält man durch Multiplikation aller Gleichungen mit den Unterdeterminanten der zweiten Kolonne

und durch darauffolgende Addition aller so multiplizierten Gleichungen:

$$x_1 \sum_i a_{i1} A_{i2} + x_2 \sum_i a_{i2} A_{i2} + \dots$$
$$+ x_n \sum_i a_{in} A_{i2} = \sum_i m_i A_{i2} ,$$

worin auf der linken Seite alle Summen außer der zweiten verschwinden, so daß:

$$x_2 \cdot \sum_i a_{i2} A_{i2} = \sum_i m_i A_{i2} .$$

Dasselbe kann man bezüglich aller Kolonnen ausführen, so daß man schließlich hinsichtlich der letzten Kolonne erhalten würde:

$$x_n \cdot \sum_i a_{in} A_{in} = \sum_i m_i A_{in} .$$

Damit hat man ein neues Gleichungssystem für die n Unbekannten $x_1, x_2, \dots, x_n$ gefunden, das ohne weiteres folgende Lösungen gestattet:

$$x_1 = \frac{\sum_i m_i A_{i1}}{\sum_i a_{i1} A_{i1}} , \quad x_2 = \frac{\sum_i m_i A_{i2}}{\sum_i a_{i2} A_{i2}} , \dots$$
$$x_n = \frac{\sum_i m_i A_{in}}{\sum_i a_{in} A_{in}} .$$

Hierbei sind die Nenner alle gleich D, der Determinante des Systems. Ferner erkennt man, daß die Zähler ebenfalls alle als Determinanten geschrieben werden können; man erhält den Zähler von x_1, wenn

man in D die Elemente der ersten Kolonne durch m_1, $m_2, \ldots, m_n$ ersetzt, den Zähler von x_2, wenn man in D die Elemente der zweiten Kolonne durch $m_1, m_2, \ldots, m_n$ ersetzt usw., schließlich den Zähler von x_n, wenn man in D die Elemente der letzten Kolonne durch m_1, $m_2, \ldots, m_n$ ersetzt (Cramer).

Die Lösungen können jetzt geschrieben werden:

$$x_1 = \frac{1}{D} \cdot \begin{vmatrix} m_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{D_1}{D},$$

$$x_2 = \frac{1}{D} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & m_1 & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & m_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{D_2}{D},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = \frac{1}{D} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & m_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & m_n \end{vmatrix} = \frac{D_n}{D}.$$

Daß diese Werte tatsächlich eine Lösung des Systems bilden, kann man sehen, falls man die gefundenen Werte einsetzt, worauf jedoch nicht weiter eingegangen werden soll.

Ein System von n linearen Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten nennt man **homogen**, sobald die von den Unbekannten freien Glieder, also im obigen System die n Größen m_1 bis m_n, verschwinden:

$$\begin{gathered} a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} x_1 + \ldots + a_{nn} x_n = 0 . \end{gathered}$$

Als selbstverständliche Lösungen erkennt man sofort:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0 .$$

Ein solches homogenes lineares Gleichungssystem kann jedoch auch Lösungen aufweisen, die nicht sämtlich verschwinden, wie aus Folgendem hervorgeht:

Jede Gleichung des vorgelegten Systems durch x_n dividiert gibt:

$$\begin{aligned} a_{11}\frac{x_1}{x_n} + \cdots + a_{1,n-1}\frac{x_{n-1}}{x_n} &= -a_{1n} \\ \cdots\cdots&\cdots\cdots \\ a_{n1}\frac{x_1}{x_n} + \cdots + a_{n,n-1}\frac{x_{n-1}}{x_n} &= -a_{nn}\,. \end{aligned}$$

Die ersten $(n-1)$ Gleichungen nach den $(n-1)$ Unbekannten $\frac{x_1}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}$ aufgelöst geben z. B. für

$$\frac{x_k}{x_n} = (-1)\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1n} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,k-1} & a_{n-1,n} & a_{n-1,k+1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

$$: \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}.$$

Den Divisor erkennt man ohne weiteres als die Unterdeterminante A_{nn} von a_{nn} in

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

In der ersten Determinante läßt man eine zyklische Vertauschung der $(n-k)$ letzten Kolonnen eintreten ($n-k-1$ Zeichenwechsel!). Dann kann die so umgeänderte Determinante als Unterdeterminante A_{nk} aufgefaßt werden, falls man sie sich noch mit $(-1)^{n+k}$

multipliziert denkt. Jetzt steht vor der ersten Determinante der Faktor $(-1)\cdot(-1)^{n-k-1}\cdot(-1)^{n+k} = +1$, und man kann schreiben:

$$\frac{x_k}{x_n} = \frac{A_{nk}}{A_{nn}}.$$

Läßt man k alle möglichen Werte von 1 bis $n-1$ annehmen, so hat man die gesuchten Lösungen des veränderten Systems, woraus sich aber sofort für die Unbekannten des gegebenen Systems ableiten läßt:

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_n = A_{n1} : A_{n2} : \ldots : A_{nn}$$

oder

$$x_1 = \lambda A_{n1},\ x_2 = \lambda A_{n2},\ \ldots,\ x_n = \lambda A_{nn},$$

wo λ eine ganz beliebige Zahl sein kann.

Die Division jeder Gleichung durch x_n ist nur ein spezieller Fall; hätte man durch ein beliebiges x, durch x_k, dividiert, so würde man als proportionale Größen zu den Unbekannten die Unterdeterminanten der k-ten Zeile von D erhalten haben, so daß man also folgende Lösungen erkennt:

$$x_1 = \lambda A_{11},\quad x_2 = \lambda A_{12},\quad \ldots,\quad x_n = \lambda A_{1n}$$

oder $$x_1 = \lambda A_{21},\quad x_2 = \lambda A_{22},\quad \ldots,\quad x_n = \lambda A_{2n}$$

. . . .

oder $$x_1 = \lambda A_{n1},\quad x_2 = \lambda A_{n2},\quad \ldots,\quad x_n = \lambda A_{nn}.$$

Setzt man die Lösungen z. B. der letzten Zeile in das vorgelegte Gleichungssystem ein, so werden die ersten $(n-1)$ Gleichungen identisch befriedigt, während man für die letzte erhält:

$$\lambda \Sigma a_{nk} A_{nk} = \lambda D = 0;$$

demnach muß zu den obigen Lösungen noch die Bedingung

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

treten, so daß man schließlich sagen kann:

Als Lösungen eines homogenen linearen Gleichungssystems von n Unbekannten sind die mit einer beliebigen, aber für alle Unbekannten gleichen Zahl multiplizierten Unterdeterminanten der n Elemente irgend einer Zeile oder Kolonne der Determinante des Systems anzusehen, falls diese Determinante verschwindet; im andern Fall weist das System nur die Lösungen $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ auf.

Hieraus folgen die beiden Sätze:

Ein homogenes lineares System von n Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten wird nur dann von einem System endlicher, nicht verschwindender Werte für diese Unbekannten befriedigt, falls die Determinante des Systems verschwindet.

Ein nicht homogenes lineares Gleichungssystem von n Gleichungen mit $(n-1)$ Unbekannten kann nur dann von demselben System von $(n-1)$ Werten für diese Unbekannten befriedigt werden, wenn die Determinante aller Koeffizienten verschwindet. (Beweis durch Zurückführung auf den vorhergehenden Fall: $x_1 = \frac{x_1'}{x_n'}$, $x_2 = \frac{x_2'}{x_n'}, \dots, x_{n-1} = \frac{x_{n-1}'}{x_n'}$.)

Im Anschluß an die Behandlung von linearen Gleichungen mag mit einigen Worten auf die linearen Substitutionen verwiesen werden.

Sollen in irgend einer oder in mehreren Funktionen mit den Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ für diese Veränderlichen lineare Ausdrücke gesetzt werden, die von n neuen Veränderlichen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ in folgender Weise abhängen:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 + \ldots + a_{1n} y_n \\ x_2 &= a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2 + \ldots + a_{2n} y_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \ldots + a_{nn} y_n , \end{aligned}$$

so nennt man dies eine lineare Substitution oder Transformation und die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

die Substitutionsdeterminante oder den Modul. Letztere muß immer von Null verschieden sein, da sonst hierdurch eine Abhängigkeit der x bestimmt wäre.

Will man umgekehrt die y durch die x ausdrücken, so verfährt man wie früher und erhält z. B. für

$$y_k = \frac{1}{D} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,k-1} & x_1 & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,k-1} & x_n & a_{n,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} ,$$

oder anders geschrieben:

$$D \cdot y_k = A_{1k} x_1 + A_{2k} x_2 + \ldots + A_{nk} x_n ,$$

so daß die zu der gegebenen inverse Substitution heißen würde:

$$\begin{aligned} D\, y_1 &= A_{11}\, x_1 + A_{12}\, x_2 + \ldots + A_{1n} x_n \\ D\, y_2 &= A_{21}\, x_1 + A_{22}\, x_2 + \ldots + A_{2n} x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D\, y_n &= A_{n1} x_1 + A_{n2} x_2 + \ldots + A_{nn} x_n . \end{aligned}$$

Für $D = 1$ nennt man nach Sylvester die lineare Substitution unimodular.

Sind die gegebenen Funktionen folgende:

$$\begin{aligned} f_1 &= b_{11}\, x_1 + b_{12}\, x_2 + \ldots + b_{1n} x_n \\ f_2 &= b_{21}\, x_1 + b_{22}\, x_2 + \ldots + b_{2n} x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n &= b_{n1} x_1 + b_{n2} x_2 + \ldots + b_{nn} x_n\,, \end{aligned}$$

oder kürzer ausgedrückt:

$$f_i = \sum_k b_{ik} x_k\,, \qquad (i\,, k = 1, 2, \ldots, n)$$

so gehen dieselben durch die Substitution:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 + \ldots + a_{1n} y_n \\ x_2 &= a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2 + \ldots + a_{2n} y_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \ldots + a_{nn} y_n \end{aligned}$$

oder kürzer durch:

$$x_i = \sum_k a_{ik} y_k \qquad (i\,, k = 1, 2, \ldots, n)$$

über in:

$$f_i = \sum_k c_{ik} y_k\,, \qquad (i\,, k = 1, 2, \ldots, n)$$

wobei:

$$c_{ik} = a_{1i} b_{k1} + a_{2i} b_{k2} + \ldots + a_{ni} b_{kn} \quad \text{(vgl. § 9)}$$

und demnach $| c_{ik} |$ die Produktdeterminante von $| a_{ik} |$ und $| b_{ik} |$ ist.

Man kann somit sagen:

Transformiert man ein System von linearen Formen, wie man die n Funktionen $f_1 \ldots f_n$ auch nennt, linear, so ist die Determinante des transformierten Systems gleich der Determinante des ursprünglichen Systems multipliziert mit dem Modul der Transformation.

Eine besondere Rolle unter den linearen Transformationen spielen die **orthogonalen Transformationen.** Man nennt die lineare Transformation

$$x_i = \sum_k a_{ik} y_k$$

orthogonal, wenn die Summe der Quadrate der ursprünglichen Veränderlichen x transformiert wird in die Summe der Quadrate der neuen Veränderlichen y (Euler, Cauchy, Jacobi, Cayley). Hieraus ergibt sich für die Koeffizienten der linearen Transformation:

$$a_{1i} a_{1k} + a_{2i} a_{2k} + \ldots + a_{ni} a_{nk} = \begin{cases} 1 \text{ für } i = k \\ 0 \text{ für } i \neq k . \end{cases}$$

Also ist das Quadrat des Moduls, oder wie man sagt, der **orthogonalen Determinante** gleich 1, also diese selbst gleich ± 1.

Eine weitere Anwendung der Determinanten in der Algebra bildet die Aufstellung der Resultante von zwei Gleichungen höheren Grades, welche durch ihr Verschwinden anzeigt, daß die beiden Gleichungen eine gemeinschaftliche Wurzel besitzen.

Gegeben sind die beiden Gleichungen:

$$a_1 x^2 + b_1 x + c_1 = 0$$
$$a_2 x^3 + b_2 x^2 + c_2 x + d_2 = 0 .$$

Bedeutet x die beiden gemeinschaftliche Wurzel, so mögen folgende fünf Gleichungen gebildet werden:

$$\begin{aligned} a_1 x^2 + b_1 x + c_1 &= 0 \\ a_1 x^3 + b_1 x^2 + c_1 x &= 0 \\ a_1 x^4 + b_1 x^3 + c_1 x^2 &= 0 \\ a_2 x^3 + b_2 x^2 + c_2 x + d_2 &= 0 \\ a_2 x^4 + b_2 x^3 + c_2 x^2 + d_2 x &= 0 . \end{aligned}$$

Sollen diese fünf Gleichungen gleichzeitig für x oder, was dasselbe ist, für die vier Unbekannten x, x^2, x^3, x^4

bestehen, so muß nach früheren Betrachtungen folgende Determinante verschwinden:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Bézout nannte diese Gleichung (S. 10) „équation résultante“, und danach nennt man diese Determinante die Resultante der beiden vorgelegten Gleichungen höheren Grades; ihr Verschwinden gibt also die notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß die beiden gegebenen höheren Gleichungen mindestens eine gemeinschaftliche Wurzel besitzen.

Nach diesen Betrachtungen kann man sich ohne weiteres die notwendige und hinreichende Bedingung dafür aufstellen, daß eine beliebige Gleichung n-ten mit einer anderen m-ten Grades mindestens eine gemeinschaftliche Wurzel hat. Die Resultante hat dann die Form einer $(n + m)$-gliedrigen Determinante. Die Art und Weise dieses Verfahrens wird die dialytische Methode Sylvesters genannt.

Die dialytische Methode kann mit Vorteil angewendet werden, wenn es sich um die Auflösung zweier quadratischer Gleichungen mit zwei Unbekannten handelt (vgl. Sporer).

Sind z. B. gegeben die beiden Gleichungen

$$a x^2 + b y^2 + c x y + d x + e y + f = 0$$
$$a' x^2 + b' y^2 + c' x y + d' x + e' y + f' = 0 ,$$

so schreibt man dieselben:

$$a x^2 + (c y + d) x + (b y^2 + e y + f) = 0$$
$$a' x^2 + (c' y + d') x + (b' y^2 + e' y + f') = 0$$

oder einfacher:

$$A x^2 + B x + C = 0$$
$$A' x^2 + B' x + C = 0 ,$$

woraus die vier Gleichungen folgen:

$$\begin{aligned} A x^3 + B x^2 + C x \quad &= 0 \\ A x^2 + B x + C &= 0 \\ A' x^3 + B' x^2 + C' x \quad &= 0 \\ A' x^2 + B' x + C' &= 0 \,. \end{aligned}$$

Für das gleichzeitige Bestehen dieser vier Gleichungen muß sein:

$$\begin{vmatrix} A & B & C & 0 \\ 0 & A & B & C \\ A' & B' & C' & 0 \\ 0 & A' & B' & C' \end{vmatrix} = 0 \,.$$

Dies ist eine Gleichung vierten Grades für y, wodurch andererseits wieder x bestimmt ist.

Beispiel:

$$\begin{aligned} x^2 - 2xy + 3x + 2 &= 0 \\ -y^2 + 2xy + x - y - 2 &= 0 \,. \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2y+3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2y+3 & 2 \\ 0 & 2y+1 & -(y^2+y+2) & 0 \\ 0 & 0 & 2y+1 & -(y^2+y+2) \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$3y^4 - 2y^3 - 12y^2 - 23y - 12 = 0 \quad \text{usw.}$$

Schließlich mag noch auf eine besondere Anwendung der Resultante verwiesen werden.

Liegt eine Gleichung

$$f(x) = a x^n + b x^{n-1} + \ldots = 0$$

vor, so kann man $f(x)$ ausdrücken durch die n Wurzeln α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$;

$$f(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n) \,.$$

Besitzt $f(x) = 0$ eine Doppelwurzel $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, ist also

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 (x - \alpha_3) \ldots (x - \alpha_n) \,,$$

so muß $f'(x)$ den Faktor $(x - \alpha)$ enthalten, d. h. die beiden Gleichungen

$$f(x) = 0 \quad \text{und} \quad f'(x) = 0$$

haben eine gemeinsame Wurzel.

Umgekehrt muß die Resultante der beiden Gleichungen $f(x) = 0$ und $f'(x) = 0$ verschwinden, falls $f(x)$ eine Doppelwurzel haben soll. In diesem Fall nennt man die Resultante, die ja von der Gleichung $f(x) = 0$ allein abhängig ist, die

Diskriminante der Gleichung $f(x) = 0$.

Ihr Verschwinden ist also die Bedingung dafür, daß die vorgelegte Gleichung eine Doppelwurzel aufweist.

§ 16. Auf geometrische Probleme.

Besonders fruchtbar hat sich die Lehre von den Determinanten für die analytische Geometrie erwiesen. Auch hier sind es vor allem Gleichungen, durch die ja die verschiedenen ebenen und räumlichen Gebilde dargestellt werden, welche eine Anwendung der Determinanten nahelegen. So mögen zur weiteren Erläuterung der Lehre von den Determinanten aus dem großen Gebiet der analytischen Geometrie einige Aufgaben behandelt werden.

Die Gleichungen dreier Geraden sind:

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ a'x + b'y + c' &= 0 \\ a''x + b''y + c'' &= 0\,. \end{aligned}$$

Sollen sich diese drei Geraden in einem Punkt schneiden, so müssen die drei Gleichungen für ein Wertepaar x, y gleichzeitig verschwinden. Demnach ist:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

die Bedingung dafür, daß sich die drei Geraden in einem Punkt schneiden.

Der Inhalt eines durch drei Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) bestimmten Dreiecks ist:

$$J = \tfrac{1}{2}\{x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_1 - x_1 y_3\} .$$

Dies kann man auch schreiben:

$$J = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} .$$

Läßt man einen der drei Punkte, z. B. (x_1, y_1), alle möglichen Lagen annehmen, ohne daß sich J ändert, so erhält man als Bedingung, bzw. als Gleichung des geometrischen Ortes für die Lagen aller dieser Punkte (x, y):

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 2J$$

oder

$$x(y_2 - y_3) - y(x_2 - x_3) + x_2 y_3 - x_3 y_2 - 2J = 0$$

oder

$$y = x \cdot \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} + \frac{1}{x_2 - x_3}(x_2 y_3 - x_3 y_2 - 2J) .$$

Dies ist aber die Gleichung einer Parallelen zu der durch (x_2, y_2) und (x_3, y_3) bestimmten Geraden. Letztere selbst erhält man, falls $J = 0$ gesetzt wird.

Drei beliebige Punkte liegen in einer Geraden, sobald das durch sie bestimmte Dreieck verschwindet; die Koordi-

naten der drei Punkte müssen dann also folgender Bedingung genügen:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Sind drei Geraden in der S. 117 angegebenen Form vorgelegt, so soll jetzt das dadurch bestimmte Dreieck seinem Inhalt nach durch die neun Konstanten dieser drei Geraden ausgedrückt werden.

Da gilt es zunächst, die drei Schnittpunkte der Dreiecksseiten, bzw. ihre Koordinaten zu bestimmen. Die ersten beiden Gleichungen liefern x_3 und y_3:

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} -c & b \\ -c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{A''}{C''}\,; \qquad y_3 = \frac{\begin{vmatrix} a & -c \\ a' & -c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{B''}{C''}\,;$$

analog wird:

$$x_1 = \frac{A}{C}\,; \qquad y_1 = \frac{B}{C}\,;$$

$$x_2 = \frac{A'}{C'}\,; \qquad y_2 = \frac{B'}{C'}\,,$$

wobei die Ausdrücke A, B, C, A', ... die Unterdeterminanten von:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

bezüglich der Elemente $a, b, c, a', \ldots$ sind. Nun wird:

$$J = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2\,C\cdot C'\cdot C''}\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}.$$

Nach den Betrachtungen über reziproke Determinanten ist:

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}^2,$$

so daß:

$$J = \frac{1}{2\,C\,C'\,C''}\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}^2$$

oder vom Vorzeichen abgesehen:

$$J = \frac{\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a'' & b'' \\ a & b \end{vmatrix}}.$$

Durch drei Punkte ist ein Kreis bestimmt; man soll die Gleichung des durch die drei Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) gehenden Kreises aufstellen.

Die gesuchte Gleichung muß die Form haben:

$$x^2 + y^2 + a\,x + b\,y + c = 0.$$

Die Koordinaten jedes der drei gegebenen Punkte müssen diese Gleichung befriedigen; also müssen mit dieser Gleichung folgende drei gleichzeitig bestehen:

$$x_i^2 + y_i^2 + a x_i + b y_i + c = 0 . \quad (i = 1, 2, 3)$$

Das Zusammenbestehen dieser vier Gleichungen ist nur möglich, wenn:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Dies ist die gesuchte Kreisgleichung.

Im Anschluß hieran soll die allgemeinere Aufgabe gelöst werden, die Gleichung eines durch fünf Punkte bestimmten Kegelschnittes aufzustellen.

Die Gleichung eines beliebigen Kegelschnittes hat die Form:

$$a x^2 + b y^2 + c x y + d x + e y + f = 0 .$$

Dann müssen mit dieser zusammen die fünf Gleichungen bestehen:

$$a x_i^2 + b y_i^2 + c x_i y_i + d x_i + e y_i + f_i = 0$$
$$(i = 1, 2, 3, 4, 5) ,$$

was nur möglich ist, falls

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & x\,y & x & y & 1 \\ x_1^2 & y_1^2 & x_1 y_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_5^2 & x_5^2 & x_5 y_5 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0 ,$$

und dies ist die gesuchte Gleichung.

Die allgemeine Gleichung eines Kegelschnittes schreibt man aus Symmetriegründen gewöhnlich in folgender Form:

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} + 2 a_{12} x y + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y = 0 .$$

Führt man homogene Koordinaten ein, d. h. ersetzt man

$$x \text{ durch } \frac{x_1}{x_3} \quad \text{und} \quad y \text{ durch } \frac{x_2}{x_3} ,$$

so lautet die obige Gleichung:

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2$$
$$+ 2 a_{12} x_1 x_2 + 2 a_{13} x_1 x_3 + 2 a_{23} x_2 x_3 = 0 ,$$

was nach bekannter Schreibweise kürzer dargestellt werden kann durch:

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k = 0 . \quad (\text{für } i, k = 1, 2, 3 \text{ und } a_{ik} = a_{ki})$$

Wie nützlich diese Darstellung unter Zuhilfenahme der Determinanten ist, soll an der allgemeinen Diskussion einer Gleichung zweiten Grades gezeigt werden, die aber der Kürze wegen nur den Endergebnissen nach angeführt werden kann (vgl. Sammlung Göschen: Bürklen, Formelsammlung):

Setzt man:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = D$$

und

$$a_{11} a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = A_{33} ,$$

wobei die Größen a die Koeffizienten der obigen Gleichung zweiten Grades sein sollen, so stellt diese dar:

A. einen eigentlichen (nicht zerfallenden) Kegelschnitt, wenn $D \neq 0$, und zwar
   1. eine Ellipse, wenn $A_{33} > 0$; dieselbe ist reell oder imaginär, je nachdem a_{11} und D verschiedene oder gleiche Vorzeichen haben; sie ist ein Kreis, wenn
$$a_{11} = a_{22} \quad \text{und} \quad a_{12} = 0\,,$$
   2. eine Parabel, wenn $A_{33} = 0$,
   3. eine Hyperbel, wenn $A_{33} < 0$;

B. einen zerfallenden Kegelschnitt, wenn $D = 0$, und zwar
   1. ein reelles sich schneidendes Geradenpaar, wenn $A_{33} < 0$,
   2. ein paralleles Geradenpaar (reell und verschieden, zusammenfallend oder imaginär), wenn $A_{33} = 0$,
   3. ein imaginäres, sich schneidendes Geradenpaar, wenn $A_{33} > 0$.

Aus der ebenen Geometrie mag noch auf eine Aufgabe eingegangen werden, die gestattet, die Gleichung eines Kegelschnittes in Determinantenform anzugeben.

Es soll zunächst untersucht werden, unter welcher Bedingung eine Gerade Tangente an einen Kegelschnitt ist.

Zu diesem Zweck mag irgend eine Gerade:
$$a x + b y + c = 0$$
ebenfalls in homogenen Koordinaten dargestellt werden:
$$a x_1 + b x_2 + c x_3 = 0\,.$$

Jede Gerade ist eindeutig bestimmt, sobald man die Größen a, b, c (ihrem Verhältnis nach) kennt. Da diese Größen eine Gerade in der Ebene bezüglich eines festen Koordinatensystems ebenso definieren, wie die Abstände eines Punktes von den Koordinatenachsen diesen selbst, so

nennt man die ersteren Linienkoordinaten im Gegensatz zu den letzteren, den Punktkoordinaten. Man bezeichnet:

$$a = u_1 , \quad b = u_2 , \quad c = u_3 ,$$

und nunmehr stellt die Gleichung:

$$\sum_{i=1,2,3} u_i x_i = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

für feste Werte von u_i (oben z. B. a, b, c) alle Punkte einer Geraden dar. Dieselbe Gleichung stellt aber für bestimmte Werte von x_i alle möglichen Geraden durch den Punkt x (x_1 , x_2 , x_3) dar, man sagt, sie stellt diesen Punkt in Linienkoordinaten dar.

Zur Lösung der oben angeführten Aufgabe mag daran erinnert werden, daß die Gleichung der Polaren eines Punktes ξ (ξ_1 , ξ_2 , ξ_3) bezüglich des Kegelschnittes

$$f(x_1 , x_2 , x_3) = \sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k = 0$$

$$(\text{für } i, k = 1, 2, 3 \text{ und } a_{ik} = a_{ki})$$

lautet:

$$\sum_i \Big(\sum_k a_{ik} \xi_k\Big) x_i = 0 \qquad (\text{für } i, k = 1, 2, 3 \text{ und } a_{ik} = a_{ki})$$

oder die Summen ausgeführt:

$$\begin{aligned} &(a_{11} \xi_1 + a_{12} \xi_2 + a_{13} \xi_3) x_1 \\ + &(a_{21} \xi_1 + a_{22} \xi_2 + a_{23} \xi_3) x_2 \\ + &(a_{31} \xi_1 + a_{32} \xi_2 + a_{33} \xi_3) x_3 = 0 . \end{aligned}$$

Diese Gleichung wird man natürlich sofort aufstellen können, sobald man die Linienkoordinaten der Polaren

kennt. Dies besagt aber nichts anderes, als daß man die Polare auch darstellen kann durch die drei Gleichungen:

$$\varrho\, u_i = \sum_k a_{ik}\,\xi_k\,, \quad (i\,,\, k = 1\,, 2\,, 3 \text{ usw.})$$

wo ϱ ein Proportionalitätsfaktor ist.

Diese Polare geht über in die Tangente, sobald der Punkt ξ auf den Kegelschnitt zu liegen kommt. Der Pol ξ und die Polare liegen dann vereinigt, d. h. die Koordinaten ξ müssen dann der Polarengleichung genügen:

$$\sum_i u_i\,\xi_i = 0\,. \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

Somit müssen für die drei Werte ξ_1, ξ_2, ξ_3 folgende vier Gleichungen gleichzeitig bestehen:

$$\begin{aligned} -\varrho\, u_1 + a_{11}\,\xi_1 + a_{12}\,\xi_2 + a_{13}\,\xi_3 &= 0 \\ -\varrho\, u_2 + a_{21}\,\xi_1 + a_{22}\,\xi_2 + a_{23}\,\xi_3 &= 0 \\ -\varrho\, u_3 + a_{31}\cdot\xi_1 + a_{32}\,\xi_2 + a_{33}\,\xi_3 &= 0 \\ u_1\,\xi_1 + u_2\,\xi_2 + u_3\,\xi_3 &= 0\,, \end{aligned}$$

was nur möglich ist unter der Bedingung:

$$\text{(I)} \qquad \begin{vmatrix} u_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ u_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Soll also irgend eine Gerade mit den Linienkoordinaten u_1, u_2, u_3 Tangente an den Kegelschnitt

$$\sum_{i,k} a_{ik}\,x_i\,x_k = 0 \quad (i, k = 1\,, 2\,, 3 \text{ und } a_{ik} = a_{ki})$$

sein, so müssen ihre Linienkoordinaten dieser Gleichnng genügen. Man sagt nun, die Gleichung (I) ist die Gleichung der Kurve zweiter Klasse, wenn man unter der Kurve zweiter Klasse die Gesamtheit aller Tangenten an die Kurve zweiter Ordnung versteht.

Löst man ferner die drei Gleichungen:

$$\varrho\, u_i = \sum_k a_{ik}\, x_k \qquad (i = 1, 2, 3)$$

auf nach den Größen x_i, so erhält man nach Früherem (S. 112):

$$\varrho' x_i = \sum_k A_{ik}\, u_k\,, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

wo die A_{ik} die Unterdeterminanten von D (S. 122) sind und ϱ' ein Proportionalitätsfaktor ist.

Diese Gleichungen gestatten, zu jeder durch ihre Linienkoordinaten bestimmten Geraden u den zugehörigen Pol x zu bestimmen.

Soll nun wieder Pol und Polare vereinigt liegen (soll also die Polare zur Tangente werden), so müssen die vier Gleichungen gleichzeitig bestehen:

$$\varrho' \cdot x_i = \sum_k A_{ik}\, u_k \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

$$\sum_i x_i\, u_i = 0\,, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

was nur möglich ist, wenn:

$$\text{(II)} \qquad \begin{vmatrix} x_1 & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ x_2 & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ x_3 & A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Diese Gleichung muß also für die Punktkoordinaten eines Punktes x bestehen, dessen Pol auf der zugehörigen Polaren eines durch die a_{ik} bestimmten Kegelschnittes und damit auf diesem selbst liegt. Mit anderen Worten, dies ist in veränderter Form, in Determinantenform, die Gleichung eines Kegelschnittes in Punktkoordinaten.

Die Bedingung dafür, daß sich die vier Ebenen

$$a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

in einem Punkte schneiden, fällt zusammen mit dem gleichzeitigen Bestehen dieser Gleichungen; also folgt:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0 .$$

Auch in der analytischen Geometrie des Raumes werden die Formeln übersichtlicher, sobald man homogene Punkt-, bzw. Ebenenkoordinaten einführt. Irgend eine Ebene stellt sich dann dar durch:

$$\sum_i u_i x_i = 0 , \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

sobald die vier Werte u_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ fest gegeben sind. Haben aber die x_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ fest gegebene Werte, so stellt diese Gleichung die Bedingung dar, der die vier Ebenenkoordinaten u_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ genügen müssen, damit die Ebene durch den Punkt x verläuft; man sagt, es ist die Darstellung eines Punktes in Ebenenkoordinaten.

Deutet man durch einen zweiten Index bei x_i oder u_i, also durch $x_{i1}, x_{i2}, \ldots$ oder $u_{i1}, u_{i2}, \ldots$, die Koordinaten verschiedener Punkte $1, 2, \ldots$ oder verschiedener Ebenen $1, 2, \ldots$ an, so lassen sich z. B. die Gleichungen von vier Ebenen darstellen durch:

$$\sum_i u_{ik} x_i = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

und die Bedingung, daß sich diese durch die u_{ik} definierten Ebenen in einem Punkt schneiden, könnte man kurz angeben durch:

$$|u_{ik}| = 0 . \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

Die Gleichungen von vier Punkten (in Ebenenkoordinaten) würden lauten:

$$\sum_i x_{ik} u_i = 0 , \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

und die Bedingung, daß die durch die x_{ik} definierten vier Punkte in einer Ebene liegen:

$$|x_{ik}| = 0 . \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

Denkt man sich in der letzten Gleichung die Elemente der ersten Zeile variabel und die anderen fest gegeben, so hat man die Gleichung einer durch drei Punkte bestimmten Ebene, wie unter ähnlicher Annahme:

$$|u_{ik}| = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

die Gleichung (in Ebenenkoordinaten) eines durch drei Ebenen bestimmten Punktes ist.

Auch das Tetraedervolumen gestattet unter Zuhilfenahme der Determinanten eine einfache Darstellung.

In gewöhnlichen Punktkoordinaten heißt die Gleichung einer durch drei gegebene Punkte $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$ gehenden Ebene E:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Setzt man an Stelle x, y, z in dieser Determinante (D) die Koordinaten x_0, y_0, z_0 eines beliebigen Punktes P_0, so erhält man eine neue Determinante (D_0). Es ist nun D_0 proportional dem Abstand p des Punktes P_0 von E. Den Wert p selbst erhält man (nach den Sätzen über die Hessesche Normalform einer Ebene), wenn man D_0 dividiert durch die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der Koeffizienten von x_0, y_0, z_0 in D_0, also durch

$$\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2}\,.$$

Hierin stellen die Determinanten unter der Quadratwurzel die doppelten Projektionen des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ auf die drei Koordinatenebenen dar, so daß die Quadratwurzel gleich dem doppelten Dreieck $P_1 P_2 P_3$ ist. Da also

$$D_0 : 2\,\triangle(P_1, P_2, P_3) = p\,,$$

so ist

$$D_0 = 2 \cdot p \cdot \triangle(P_1, P_2, P_3)\,.$$

Das ist aber der sechsfache Inhalt (V) des durch die Punkte P_0, P_1, P_2, P_3 gebildeten Tetraeders, so daß:

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}\,.$$

Fällt P_0 in den Koordinatenanfangspunkt, so kann gesetzt werden:

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix},$$

was bei Einführung von Polarkoordinaten:

$$x_i = \varrho_i \cos\alpha_i,\; y_i = \varrho_i \cos\beta_i,\; z_i = \varrho_i \cos\gamma_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

übergeht in:

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} \varrho_1 \cos\alpha_1 & \varrho_1 \cos\beta_1 & \varrho_1 \cos\gamma_1 \\ \varrho_2 \cos\alpha_2 & \varrho_2 \cos\beta_2 & \varrho_2 \cos\gamma_2 \\ \varrho_3 \cos\alpha_3 & \varrho_3 \cos\beta_3 & \varrho_3 \cos\gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\varrho_1 \cdot \varrho_2 \cdot \varrho_3}{6} \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Die letzte Determinante nennt man den Sinus der von den drei Radien ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 gebildeten Ecke und bezeichnet ihn mit $\sin(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$, so daß:

$$6\,V = \varrho_1 \cdot \varrho_2 \cdot \varrho_3 \sin(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3).$$

Im Anschluß hieran mögen noch die Flächen zweiter Ordnung Erwähnung finden.

Eine Fläche zweiter Ordnung wird dargestellt durch die Gleichung:

$$a x^2 + b y^2 + c z^2 + 2 d x y + 2 e x z + 2 f y z$$
$$+ 2 g x + 2 h y + 2 i z + k = 0$$

oder in homogenen Punktkoordinaten durch:

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k = 0 \quad (\text{für } i, k = 1, 2, 3, 4 \text{ und } a_{ik} = a_{ki}).$$

Deutet man wieder durch nachgestellte Indizes bei den schon vorhandenen die Koordinaten verschiedener Punkte an, so entsteht durch die Elimination der a_{ik} aus den zehn Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll} \sum_{i,k} a_{ik}\, x_i\, x_k = 0 & \\ \sum_{i,k} a_{ik}\, x_{in}\, x_{kn} = 0 & n = 1, 2, \ldots, 9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} i, k = 1, 2, 3, 4 \\ \text{und } a_{ik} = a_{ki} \end{array}$$

die Gleichung der durch neun Punkte bestimmten Fläche zweiter Ordnung:

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x_1 \cdot x_2 & x_1 \cdot x_3 & x_1 \cdot x_4 & x_2 \cdot x_3 & x_2 \cdot x_4 & x_3 \cdot x_4 \\ x_{11}^2 & x_{21}^2 & x_{31}^2 & x_{41}^2 & x_{11} \cdot x_{21} & x_{11} \cdot x_{31} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{19}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0 .$$

Auf eine genaue Diskussion der Flächen zweiter Ordnung kann hier nicht eingegangen werden; es mag nur hervorgehoben werden, daß wieder die Determinanten:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{14} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{41} & \ldots & a_{44} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{13} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{31} & \ldots & a_{33} \end{vmatrix}.$$

von Wichtigkeit sind.

Ist $D \neq A_{44} \neq 0$, so hat man zentrale Flächen zweiter Ordnung; ist aber $A_{44} = 0$, so hat man Paraboloide. Kegel erhält man für $D = 0$. Ist aber gleichzeitig $D = A_{44} = 0$, so hat man Zylinder. Ebenenpaare hat man für

$$D = A_{ii} = 0 . \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Für die Bedingung, daß irgend eine Ebene:

$$\sum_i u_i x_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Tangentialebene an die Fläche zweiter Ordnung ist:

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4 \text{ und } a_{ik} = a_{ki}),$$

findet man:

$$\begin{vmatrix} u_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ u_2 & a_{21} & . & . & . \\ u_3 & a_{31} & . & . & . \\ u_4 & a_{41} & . & . & . \\ 0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{vmatrix} = 0 .$$

Diese Gleichung kann auch aufgefaßt werden als die Gesamtheit aller Tangentialebenen an die obige Fläche zweiter Ordnung, d. h. als die Gleichung der entsprechenden Fläche zweiter Klasse.

Umgekehrt drückt sich die Bedingung dafür, daß ein Punkt (x_1, x_2, x_3, x_4) Berührungspunkt bei der Fläche zweiter Klasse ist, aus durch:

$$\begin{vmatrix} x_1 & A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ x_2 & A_{21} & . & . & . \\ x_3 & A_{31} & . & . & . \\ x_4 & A_{41} & . & . & . \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} = 0 ,$$

und dies ist zugleich die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung in Punktkoordinaten.

Namenverzeichnis.

Sachverzeichnis.

Geschichte der lateinischen Sprache von Dr. Friedrich Stolz, Professor an der Universität Innsbruck. Nr. 492.

Grundriß der lateinischen Sprachlehre v. Prof. Dr. W. Votsch i. Magdeburg. Nr. 82.

Russische Grammatik von Dr. Erich Berneker, Prof. an der Universit. Prag. Nr. 66.

Kleines russisches Vokabelbuch von Dr. Erich Boehme, Lektor an der Handelshochschule Berlin. Nr. 475.

Russisch-deutsches Gesprächsbuch von Dr. Erich Berneker, Professor an der Universität Prag. Nr. 68.

Russisches Lesebuch mit Glossar v. Dr. Erich Berneker, Prof. a. d. Univ. Prag. Nr. 67.

Geschichte der klassischen Philologie von Dr. Wilh. Kroll, ord. Prof. an der Universität Münster. Nr. 367.

Literaturgeschichtliche Bibliothek.

Deutsche Literaturgeschichte von Dr. Max Koch, Professor an der Universität Breslau. Nr. 31.

Deutsche Literaturgeschichte der Klassikerzeit von Prof. Carl Weitbrecht. Durchgesehen und ergänzt von Prof. Dr. Karl Berger. Nr. 161.

Deutsche Literaturgeschichte des 19. Jahrhunderts von Prof. Carl Weitbrecht. Durchgesehen und ergänzt von Dr. Richard Weitbrecht in Wimpfen. 2 Teile. Nr. 134, 135.

Geschichte des deutschen Romans von Dr. Hellmuth Mielke. Nr. 229.

Gotische Sprachdenkmäler mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Dr. Herm. Jantzen, Dir. d. Königin-Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 79.

Althochdeutsche Literatur mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Th. Schauffler, Prof. am Realgymnasium in Ulm. Nr. 28.

Eddalieder mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Dr. Wilh. Ranisch, Gymnasialoberlehrer in Osnabrück. Nr. 171.

Das Waltharì-Lied. Ein Heldensang aus dem 10. Jahrhundert im Versmaße der Urschrift übersetzt u. erläutert v. Prof. Dr. H. Althof in Weimar. Nr. 46.

Dichtungen aus mittelhochdeutscher Frühzeit. In Auswahl mit Einleitungen und Wörterbuch herausgegeben von Dr. Hermann Jantzen, Direktor der Königin-Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 137.

Der Nibelunge Nôt in Auswahl und mittelhochdeutsche Grammatik mit kurzem Wörterbuch von Dr. W. Golther, Prof. an der Universität Rostock. Nr. 1.

Kudrun und Dietrichepen. Mit Einleitung und Wörterbuch von Dr. O. L. Jiriczek, Prof. an der Universität Münster. Nr. 10.

Hartmann von Aue, Wolfram von Eschenbach und Gottfried von Straßburg. Auswahl aus dem höfischen Epos mit Anmerkungen und Wörterbuch v. Dr. K. Marold, Prof. a. Kgl. Friedrichskollegium zu Königsberg i. Pr. Nr. 22.

Walther von der Vogelweide mit Auswahl aus Minnesang und Spruchdichtung. Mit Anmerkungen und einem Wörterbuch von O. Güntter, Prof. an der Oberrealschule und an der Techn. Hochschule in Stuttgart. Nr. 23.

Die Epigonen des höfischen Epos. Auswahl aus deutschen Dichtungen des 13. Jahrhunderts von Dr. Viktor Junk, Aktuarius der Kais. Akademie der Wissenschaften in Wien. Nr. 289.

Deutsche Literaturdenkmäler des 14. und 15. Jahrhunderts, ausgewählt und erläutert von Dr. Hermann Jantzen, Direktor der Königin-Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 181.

Deutsche Literaturdenkmäler des 16. Jahrhunderts. I: **Martin Luther, Thomas Murner und das Kirchenlied des 16. Jahrhunderts.** Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymnasium zu Leipzig. Nr. 7.

Deutsche Literaturdenkmäler des 16. Jahrhunderts. II: Hans Sachs. Ausgewählt und erläutert von Professor Dr. Julius Sahr. Nr. 24.

— III: Von Brant bis Rollenhagen: Brant, Hutten, Fischart, sowie Tierepos und Fabel. Ausgewählt u. erläutert von Prof. Dr. Julius Sahr. Nr. 36.

Deutsche Literaturdenkmäler des 17. und 18. Jahrhunderts von Dr. Paul Legband in Berlin. 1. Teil. Nr. 364.

Simplicius Simplicissimus von Hans Jakob Christoffel von Grimmelshausen. In Auswahl herausgegeben von Prof. Dr. F. Bobertag, Dozent an der Universität Breslau. Nr. 138.

Das deutsche Volkslied. Ausgewählt und erläutert von Professor Dr. Julius Sahr. 2 Bändchen. Nr. 25, 132.

Englische Literaturgeschichte von Dr. Karl Weiser in Wien. Nr. 69.

Grundzüge und Haupttypen der englischen Literaturgeschichte von Dr. Arnold M. M. Schröer, Prof. an der Handelshochschule in Köln. 2 Teile. Nr. 286, 287.

Italienische Literaturgeschichte von Dr. Karl Voßler, Prof. an der Universität Heidelberg. Nr. 125.

Spanische Literaturgeschichte von Dr. Rudolf Beer in Wien. 2 Bde. Nr. 167, 168.

Portugiesische Literaturgeschichte von Dr. Karl von Reinhardstoettner, Prof. an der Königl. Technischen Hochschule München. Nr. 213.

Russische Literaturgeschichte von Dr. Georg Polonskij in München. Nr. 166.

Russische Literatur v. Dr. Erich Boehme, Lektor an d. Handelshochschule Berlin. I. Teil: Auswahl moderner Prosa und Poesie mit ausführlichen Anmerkungen und Akzentbezeichnung. Nr. 403.

— II. Teil: Всеволодъ, Гаршинъ, Разсказы. Mit Anmerkungen und Akzentbezeichnung. Nr. 404.

Slavische Literaturgeschichte von Dr. Josef Karásek in Wien. I: Ältere Literatur bis zur Wiedergeburt. Nr. 277.

— II: Das 19. Jahrhundert. Nr. 278.

Nordische Literaturgeschichte. I: Die isländische und norwegische Literatur des Mittelalters von Dr. Wolfgang Golther, Prof. an der Univ. Rostock. Nr. 254.

Die Hauptliteraturen des Orients von Dr. Mich. Haberlandt, Privatdozent an der Universität Wien. I: Die Literaturen Ostasiens und Indiens. Nr. 162.

— II: Die Literaturen der Perser, Semiten und Türken. Nr. 163.

Griechische Literaturgeschichte mit Berücksichtigung der Geschichte der Wissenschaften von Dr. Alfred Gercke, Prof. an der Univers. Greifswald. Nr. 70.

Römische Literaturgeschichte von Dr. Herm. Joachim in Hamburg. Nr. 52.

Die Metamorphosen des P. Ovidius Naso. In Auswahl mit einer Einleitung und Anmerkungen herausgegeben von Dr. Julius Ziehen in Frankfurt a. M. Nr. 442.

Vergil, Aeneis. In Auswahl mit einer Einleitung und Anmerkungen herausgegeben von Dr. Julius Ziehen in Frankfurt a. M. Nr. 497.

Geschichtliche Bibliothek.

Einleitung in die Geschichtswissenschaft von Dr. Ernst Bernheim, Prof. an der Universität Greifswald. Nr. 270.

Urgeschichte der Menschheit von Dr. Moriz Hoernes, Prof. an der Universität in Wien. Mit 53 Abbildungen. Nr. 42.

Geschichte des alten Morgenlandes von Dr. Fr. Hommel, o. ö. Prof. der semitischen Sprachen an der Universität in München. Mit 9 Voll- und Textbildern und 1 Karte des Morgenlandes. Nr. 43.

Geschichte Israels bis auf die griechische Zeit von Lic. Dr. J. Benzinger. Nr. 231.

Neutestamentliche Zeitgeschichte I: Der historische und kulturgeschichtliche Hintergrund des Urchristentums von Lic. Dr. W. Staerk, Professor an der Universität Jena. Mit 3 Karten. Nr. 325.

— **II:** Die Religion des Judentums im Zeitalter des Hellenismus und der Römerherrschaft. Mit einer Planskizze. Nr. 326.

Griechische Geschichte von Dr. Heinrich Swoboda, Prof. an der Deutschen Universität Prag. Nr. 49.

Griechische Altertumskunde von Prof. Dr. Rich. Maisch, neubearbeitet von Rektor Dr. Franz Pohlhammer. Mit 9 Vollbildern. Nr. 16.

Römische Geschichte von Realgymnasialdirektor Dr. Julius Koch in Grunewald. Nr. 19.

Römische Altertumskunde von Dr. Leo Bloch in Wien. Mit 8 Vollbild. Nr. 45.

Geschichte des Byzantinischen Reiches von Dr. K. Roth in Kempten. Nr. 190.

Deutsche Geschichte von Prof. Dr. F. Kurze, Oberlehrer am Kgl. Luisengymnasium in Berlin. **I: Mittelalter** (bis 1519). Nr. 33.

— **II: Zeitalter der Reformation und der Religionskriege** (1500—1648) Nr. 34.

— **III: Vom Westfälischen Frieden bis zur Auflösung des alten Reichs** (1648 bis 1806). Nr. 35.

Deutsche Stammeskunde von Dr. Rudolf Much, Prof. an der Universität in Wien. Mit 2 Karten und 2 Tafeln. Nr. 126.

Die deutschen Altertümer von Dr. Franz Fuhse, Direktor des Städt. Museums in Braunschweig. Mit 70 Abbildungen. Nr. 124.

Abriß der Burgenkunde von Hofrat Dr. Otto Piper in München. Mit 30 Abbildungen. Nr. 119.

Deutsche Kulturgeschichte von Dr. Reinh. Günther. Nr. 56.

Deutsches Leben im 12. u. 13. Jahrhundert. Realkommentar zu den Volks- und Kunstepen und zum Minnesang. **I:** Öffentliches Leben. Von Prof. Dr. Jul. Dieffenbacher in Freiburg i. B. Mit 1 Tafel u. Abbildungen. Nr. 93.

— **II:** Privatleben. Mit Abbildungen. Nr. 328.

Quellenkunde zur Deutschen Geschichte von Dr. Carl Jacob, Prof. an der Universität in Tübingen. 1. Band. Nr. 279.

Österreichische Geschichte von Prof. Dr. Franz von Krones, neubearbeitet von Dr. Karl Uhlirz, Prof. an der Univ. Graz. **I:** Von der Urzeit bis zum Tode König Albrechts II. (1439). Mit 11 Stammtafeln. Nr. 104.

— **II:** Vom Tode König Albrechts II. bis zum Westfälischen Frieden (1440 bis 1648) Mit 2 Stammtafeln. Nr. 105.

Englische Geschichte von Prof. L. Gerber, Oberlehrer in Düsseldorf. Nr. 375.

Französische Geschichte von Dr. R. Sternfeld, Prof. an der Univ. Berlin. Nr. 85.

Russische Geschichte von Dr. Wilhelm Reeb, Oberlehrer am Ostergymnasium in Mainz. Nr. 4.

Polnische Geschichte von Dr. Clemens Brandenburger in Posen. Nr. 338.

Spanische Geschichte von Dr. Gust. Diercks. Nr. 266.

Schweizerische Geschichte v. Dr. K. Dändliker, Prof. a. d. Univ. Zürich. Nr. 188.

Geschichte der christlichen Balkanstaaten (Bulgarien, Serbien, Rumänien, Montenegro, Griechenland) von Dr. K. Roth in Kempten. Nr. 331.

Bayerische Geschichte von Dr. Hans Ockel in Augsburg. Nr. 160.

Geschichte Frankens von Dr. Christian Meyer, Kgl. preuß. Staatsarchivar a. D. in München. Nr. 434.

Sächsische Geschichte von Prof. Otto Kaemmel, Rektor des Nikolaigymnasiums zu Leipzig. Nr. 100.

Thüringische Geschichte von Dr. Ernst Devrient in Leipzig. Nr. 352.

Badische Geschichte von Dr. Karl Brunner, Prof. am Gymnasium in Pforzheim u. Privatdozent der Geschichte an der Techn. Hochschule in Karlsruhe. Nr. 230.

Württembergische Geschichte von Dr. Karl Weller, Professor am Karlsgymnasium in Stuttgart. Nr. 462.

Geschichte Lothringens von Geh. Reg.-R. Dr. Herm. Derichsweiler in Straßburg. Nr. 6.

Die Kultur der Renaissance. Gesittung, Forschung, Dichtung von Dr. Robert F. Arnold, Professor an der Universität Wien. Nr. 189.

Geschichte des 19. Jahrhunderts von Oskar Jäger, o. Honorarprofessor an der Universität Bonn. 1. Bändchen: 1800—1852. Nr. 216.

— 2. Bändchen: 1853 bis Ende des Jahrhunderts. Nr. 217.

Kolonialgeschichte von Dr. Dietrich Schäfer, Prof. der Geschichte an der Univ. Berlin. Nr. 156.

Die Seemacht in der deutschen Geschichte von Wirkl. Admiralitätsrat Dr. Ernst von Halle, Prof. an der Universität Berlin. Nr. 370.

Geographische Bibliothek.

Physische Geographie von Dr. Siegm. Günther, Professor an der Königl. Technischen Hochschule in München. Mit 32 Abbildungen. Nr. 26.

Astronomische Geographie von Dr. Siegm. Günther, Professor an der Königl. Technischen Hochschule in München. Mit 52 Abbildungen. Nr. 92.

Klimakunde. I: Allgemeine Klimalehre von Professor Dr. W. Köppen, Meteorologe der Seewarte Hamburg. Mit 7 Tafeln u. 2 Figuren. Nr. 114.

Paläoklimatologie von Dr. Wilh. R. Eckardt, Assistent a. Meteorologischen Observatorium u. d. öffentl. Wetterdienststelle in Aachen. Nr. 482.

Meteorologie von Dr. W. Trabert, Professor a. d. Universität in Innsbruck. Mit 49 Abbildungen und 7 Tafeln. Nr. 54.

Physische Meereskunde von Prof. Dr. Gerhard Schott, Abteilungsvorsteher an der Deutschen Seewarte in Hamburg. Mit 39 Abb. im Text u. 8 Tafeln. Nr. 112.

Paläogeographie. Geologische Geschichte der Meere u. Festländer v. Dr. Franz Kossmat in Wien. Mit 6 Karten. Nr. 406.

Das Eiszeitalter von Dr. Emil Werth in Berlin-Wilmersdorf. Mit 17 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 431.

Die Alpen von Dr. Rob. Sieger, Prof. an der Universität Graz. Mit 19 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 129.

Gletscherkunde von Dr. Fritz Machaček in Wien. Mit 5 Abbildungen im Text und 11 Tafeln. Nr. 154.

Pflanzengeographie von Prof. Dr. Ludwig Diels, Privatdoz. an der Univers. Berlin. Nr. 389.

Tiergeographie von Dr. Arnold Jacobi, Professor der Zoologie an der Königl. Forstakademie zu Tharandt. Mit 2 Karten. Nr. 218.

Länderkunde von Europa von Dr. Franz Heiderich, Professor an der Exportakademie in Wien. Mit 10 Textkärtchen und Profilen und einer Karte der Alpeneinteilung. Nr. 62.

— **der außereuropäischen Erdteile** von Dr. Franz Heiderich, Professor an der Exportakademie in Wien. Mit 11 Textkärtchen u. Profil. Nr. 63.

Landeskunde und Wirtschaftsgeographie des Festlandes Australien von Dr. Kurt Hassert, Professor an der Handelshochschule in Köln. Mit 8 Abbildungen, 6 graphischen Tabellen und 1 Karte. Nr. 319.

— **von Baden** von Professor Dr. O. Kienitz in Karlsruhe. Mit Profilen, Abbildungen und 1 Karte. Nr. 199.

— **des Königreichs Bayern** von Dr. W. Götz, Professor an der Königl. Techn. Hochschule München. Mit Profilen, Abbildungen und 1 Karte. Nr. 176.

— **der Republik Brasilien** von Rodolpho von Ihering. Mit 12 Abbildungen und einer Karte. Nr. 373.

— **von Britisch-Nordamerika** von Professor Dr. A. Oppel in Bremen. Mit 13 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 284.

— **von Elsaß-Lothringen** von Prof. Dr. R. Langenbeck in Straßburg i. E. Mit 11 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 215.

— **von Frankreich** von Dr. Richard Neuse, Direktor der Oberrealschule in Spandau. 1. Bändchen. Mit 23 Abbildungen im Text und 16 Landschaftsbildern auf 16 Tafeln. Nr. 466.

— — 2. Bändchen. Mit 15 Abbildungen im Text, 18 Landschaftsbildern auf 16 Tafeln und einer lithographischen Karte. Nr. 467.

— **des Großherzogtums Hessen, der Provinz Hessen-Nassau und des Fürstentums Waldeck** von Prof. Dr. Georg Greim in Darmstadt. Mit 13 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 376.

— **der Iberischen Halbinsel** v. Dr. Fritz Regel, Prof. a. d. Univ. Würzburg. Mit 8 Kärtchen u. 8 Abbild. im Text u. 1 Karte in Farbendruck. Nr. 235.

— **der Großherzogtümer Mecklenburg und der Freien und Hansestadt Lübeck** von Dr. Sebald Schwarz, Direktor der Realschule zum Dom in Lübeck. Mit 17 Abbildungen und Karten im Text, 16 Tafeln und einer Karte in Lithographie. Nr. 487.

— **von Österreich-Ungarn** von Dr. Alfred Grund, Professor an der Universität Berlin. Mit 10 Textillustrationen und 1 Karte. Nr. 244.

— **der Rheinprovinz** von Dr. V. Steinecke, Direktor des Realgymnasiums in Essen. Mit 9 Abb., 3 Kärtchen und 1 Karte. Nr. 308.

— **des Europäischen Rußlands nebst Finnlands** von Dr. Alfred Philippson, ord. Prof. der Geographie an der Universität Halle a. S. Mit 9 Abbildungen, 7 Textkarten und einer lithographischen Karte. Nr. 359.

— **des Königreichs Sachsen** von Dr. J. Zemmrich, Oberlehrer am Realgymnasium in Plauen. Mit 12 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 258.

— **der Schweiz** von Professor Dr. H. Walser in Bern. Mit 16 Abbildungen und einer Karte. Nr. 398.

— **von Skandinavien** (Schweden, Norwegen und Dänemark) von Kreisschulinspektor Heinrich Kerp in Kreuzburg. Mit 11 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 202.

— **der Vereinigten Staaten von Nordamerika** von Prof. Heinrich Fischer, Oberlehrer am Luisenstädtischen Realgymnasium in Berlin. Mit Karten, Figuren im Text und Tafeln. 2 Bändchen. Nr. 381, 382.

— **des Königreichs Württemberg** von Dr. Kurt Hassert, Professor an der Handelshochschule in Köln. Mit 16 Vollbildern und 1 Karte. Nr. 157.

Die deutschen Kolonien I: Togo und Kamerun von Prof. Dr. Karl Dove in Göttingen. Mit 16 Tafeln und einer lithogr. Karte. Nr. 441.

Landes- und Volkskunde Palästinas von Privatdozent Dr. G. Hölscher in Halle a. S. Mit 8 Vollbildern und einer Karte. Nr. 345.

Völkerkunde von Dr. Michael Haberlandt, Privatdozent an der Universität Wien. Mit 56 Abbildungen. Nr. 73.

Kartenkunde, geschichtlich dargestellt von E. Gelcich, Direktor der k. k. Nautischen Schule in Lussinpiccolo, F. Sauter, Professor am Realgymnasium in Ulm und Dr. Paul Dinse, Assistent der Gesellschaft für Erdkunde in Berlin, neu bearbeitet von Dr. M. Groll, Kartograph in Berlin. Mit 71 Abbildungen. Nr. 30.

Mathematische u. astronomische Bibliothek.

Geschichte der Mathematik von Dr. A. Sturm, Professor am Obergymnasium in Seitenstetten. Nr. 226.

Arithmetik und Algebra von Dr. Hermann Schubert, Prof. an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 47.

Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra von Dr. Hermann Schubert, Prof. an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 48.

Algebraische Kurven von Eugen Beutel, Oberreallehrer in Vaihingen-Enz. I: Kurvendiskussion. Mit 57 Figuren im Text. Nr. 435.

Determinanten von Paul B. Fischer, Oberlehrer an der Oberrealschule zu Groß-Lichterfelde. Nr. 402.

Ebene Geometrie mit 110 zweifarb. Figuren von G. Mahler, Prof. am Gymnasium in Ulm. Nr. 41.

Darstellende Geometrie I mit 110 Figuren von Dr. Rob. Haußner, Prof. an der Universität Jena. Nr. 142.

— II. Mit 40 Figuren. Nr. 143.

Ebene und sphärische Trigonometrie mit 70 Fig. von Dr. Gerhard Hessenberg, Professor an der Landwirtschaftl. Akademie Bonn-Poppelsdorf. Nr. 99.

Stereometrie mit 66 Figuren von Dr. R. Glaser in Stuttgart. Nr. 97.

Niedere Analysis mit 6 Fig. von Prof. Dr. Benedikt Sporer in Ehingen. Nr. 53.

Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt von Dr. Hermann Schubert, Prof. an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 81.

Fünfstellige Logarithmen von Professor Aug. Adler, Direktor der k. k. Staatsoberrealschule in Wien. Nr. 423.

Analytische Geometrie der Ebene mit 57 Figuren von Prof. Dr. M. Simon in Straßburg. Nr. 65.

Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie der Ebene mit 32 Fig. von O. Th. Bürklen, Professor am Realgymnasium in Schwäb.-Gmünd. Nr. 256.

Analytische Geometrie des Raumes mit 28 Abbildungen von Professor Dr. M. Simon in Straßburg. Nr. 89.

Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie des Raumes mit 8 Fig. von O. Th. Bürklen, Prof. am Realgymnasium in Schwäb.-Gmünd. Nr. 309.

Höhere Analysis von Dr. Friedrich Junker, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. I: Differentialrechnung mit 68 Figuren. Nr. 87.

— II: Integralrechnung mit 89 Figuren. Nr. 88.

Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung mit 46 Fig. von Dr. Friedr. Junker, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Nr. 146.

Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung mit 52 Fig. von Dr. Friedr. Junker, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Nr. 147.

Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung mit 91 Fig. von Dr. K. Doehlemann, Prof. an der Universität München. Nr. 72.

Mathematische Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik, enth. die wichtigsten Formeln und Lehrsätze der Arithmetik, Algebra, algebraischen Analysis, ebenen Geometrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, math. Geographie, analyt. Geometrie der Ebene und des Raumes, der Differential- und Integralrechnung von O. Th. Bürklen, Prof. am Kgl. Realgymnasium in Schw.-Gmünd. Mit 18 Figuren. Nr. 51.

Versicherungsmathematik von Dr. Alfred Loewy, Prof. an der Universität Freiburg i. Br. Nr. 180.

Geometrisches Zeichnen von H. Becker, neubearbeitet von Prof. J. Vonderlinn, Direktor der Kgl. Baugewerkschule zu Münster i. W. Mit 290 Figuren und 23 Tafeln im Text. Nr. 58.

Vektoranalysis von Dr. Siegfr. Valentiner, Privatdozent für Physik an der Universität Berlin. Mit 11 Figuren. Nr. 354.

Astrophysik. Die Beschaffenheit der Himmelskörper von Dr. Walter F. Wislicenus, neu bearbeitet von Dr. H. Ludendorff in Potsdam. Mit 15 Abbildungen. Nr. 91.

Astronomie. Größe, Bewegung und Entfernung der Himmelskörper von A. F. Möbius, neubearb. von Dr. Herm. Kobold, Prof. an der Universität Kiel. I: Das Planetensystem. Mit 33 Abbildungen. Nr. 11.

Astronomische Geographie mit 52 Figuren von Dr. Siegm. Günther, Prof. an der Techn. Hochschule in München. Nr. 92.

Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate mit 15 Fig. und 2 Tafeln von Wilh. Weitbrecht, Professor der Geodäsie in Stuttgart. Nr. 302.

Vermessungskunde von Dipl.-Ing. P. Werkmeister, Oberlehrer an der Kaiserl. Technischen Schule in Straßburg i. E. I: Feldmessen und Nivellieren. Mit 146 Abbildungen. Nr. 468.

— II: Der Theodolit. Trigonometrische und barometrische Höhenmessung. Tachymetrie. Mit 109 Abbildungen. Nr. 469.

Nautik. Kurzer Abriß des täglich an Bord von Handelsschiffen angewandten Teils der Schiffahrtskunde mit 56 Abbildungen von Dr. Franz Schulze, Direktor der Navigationsschule zu Lübeck. Nr. 84.

☞ Gleichzeitig macht die Verlagshandlung auf die „Sammlung Schubert", eine Sammlung mathematischer Lehrbücher, aufmerksam. Ein vollständiges Verzeichnis dieser Sammlung, sowie ein ausführlicher Katalog aller übrigen mathematischen Werke der G. J. Göschenschen Verlagshandlung kann kostenfrei durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Naturwissenschaftliche Bibliothek.

Paläontologie und Abstammungslehre von Prof. Dr. Karl Diener in Wien. Mit 9 Abbildungen. Nr. 460.

Der menschliche Körper, sein Bau und seine Tätigkeiten, von E. Rebmann, Oberschulrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abbildungen und 1 Tafel. Nr. 18.

Urgeschichte der Menschheit von Dr. Moriz Hoernes, Prof. an der Universität Wien. Mit 53 Abbildungen. Nr. 42.

Völkerkunde von Dr. Michael Haberlandt, k. u. k. Kustos der ethnogr. Sammlung des naturhistor. Hofmuseums u. Privatdozent an der Universität Wien. Mit 51 Abbildungen. Nr. 73.

Tierkunde von Dr. Franz v. Wagner, Prof. an der Universität Graz. Mit 78 Abbildungen. Nr. 60.

Abriß der Biologie der Tiere von Dr. Heinrich Simroth, Professor an der Universität Leipzig. Nr. 131.

Tiergeographie von Dr. Arnold Jacobi, Prof. der Zoologie an der Kgl. Forstakademie zu Tharandt. Mit 2 Karten. Nr. 218.

Das Tierreich. I: **Säugetiere**, von Oberstudienrat Prof. Dr. Kurt Lampert, Vorsteher des Kgl. Naturalienkabinetts in Stuttgart. Mit 15 Abbildungen. Nr. 282.

— III: **Reptilien und Amphibien**, von Dr. Franz Werner, Privatdozent an der Universität Wien. Mit 48 Abbildungen. Nr. 383.

— IV: **Fische**, von Dr. Max Rauther, Privatdozent der Zoologie an der Universität Gießen. Mit 37 Abbildungen. Nr. 356.

— VI: **Die wirbellosen Tiere**, von Dr. Ludwig Böhmig, Prof. der Zoologie an der Universität Graz. I: Urtiere, Schwämme, Nesseltiere, Rippenquallen und Würmer. Mit 74 Figuren. Nr. 439.

Entwicklungsgeschichte der Tiere von Dr. Johs. Meisenheimer, Professor der Zoologie an der Universität Marburg. I: Furchung, Primitivanlagen, Larven, Formbildung, Embryonalhüllen. Mit 48 Fig. Nr. 378.

— II: Organbildung. Mit 46 Figuren. Nr. 379.

Schmarotzer und Schmarotzertum in der Tierwelt. Erste Einführung in die tierische Schmarotzerkunde von Dr. Franz v. Wagner, Professor an der Universität Graz. Mit 67 Abbildungen. Nr. 151.

Geschichte der Zoologie von Dr. Rud. Burckhardt. weil. Direktor der Zoologischen Station des Berliner Aquariums in Rovigno (Istrien). Nr. 357.

Die Pflanze, ihr Bau und ihr Leben von Professor Dr. E. Dennert in Godesberg. Mit 96 Abbildungen. Nr. 44.

Das Pflanzenreich. Einteilung des gesamten Pflanzenreichs mit den wichtigsten und bekanntesten Arten von Dr. F. Reinecke in Breslau und Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Fig. Nr. 122.

Die Stämme des Pflanzenreichs von Privatdoz. Dr. Rob. Pilger, Kustos am Kgl. Botanischen Garten in Berlin-Dahlem. Mit 22 Abbildungen. Nr. 485.

Pflanzenbiologie von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbildungen. Nr. 127.

Pflanzengeographie von Prof. Dr. Ludwig Diels, Privatdoz. an der Univers. Berlin. Nr. 389.

Morphologie, Anatomie und Physiologie der Pflanzen von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbildungen. Nr. 141.

Die Pflanzenwelt der Gewässer von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbildungen. Nr. 158.

Exkursionsflora von Deutschland zum Bestimmen der häufigeren in Deutschland wildwachsenden Pflanzen von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. 2 Teile. Mit 100 Abbildungen. Nr. 268, 269.

Die Nadelhölzer von Prof. Dr. F. W. Neger in Tharandt. Mit 85 Abbildungen, 5 Tabellen und 3 Karten. Nr. 355.

Nutzpflanzen von Prof. Dr. J. Behrens, Vorst. der Großh. landwirtschaftl. Versuchsanst. Augustenberg. Mit 53 Figuren. Nr. 123.

Das System der Blütenpflanzen mit Ausschluß der Gymnospermen von Dr. R. Pilger, Assistent am Kgl. Botanischen Garten in Berlin-Dahlem. Mit 81 Figuren. Nr. 393.

Pflanzenkrankheiten von Dr. Werner Friedrich Bruck in Gießen. Mit 1 farb. Tafel und 45 Abbildungen. Nr. 310.

Mineralogie von Dr. R. Brauns, Professor an d. Universität Bonn. Mit 132 Abbildungen. Nr. 29.

Geologie in kurzem Auszug für Schulen und zur Selbstbelehrung zusammengestellt von Prof. Dr. Eberh. Fraas in Stuttgart. Mit 16 Abbildungen und 4 Tafeln mit 51 Figuren. Nr. 13.

Paläontologie von Dr. Rud. Hoernes, Professor an der Universität Graz. Mit 87 Abbildungen. Nr. 95.

Petrographie von Dr. W. Bruhns, Professor an der Kgl. Bergakademie Clausthal. Mit 15 Abbildungen. Nr. 173.

Kristallographie von Dr. W. Bruhns, Prof. an der Kgl. Bergakademie Clausthal. Mit 190 Abbildungen. Nr. 210.

Geschichte der Physik von A. Kistner, Prof. an der Großh. Realschule zu Sinsheim a. E. I: Die Physik bis Newton. Mit 13 Figuren. Nr. 293.

— II: Die Physik von Newton bis zur Gegenwart. Mit 3 Figuren. Nr. 294.

Theoretische Physik. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. der Physik an der Technischen Hochschule in Wien. I. Teil: Mechanik und Akustik. Mit 19 Abbildungen. Nr. 76.

— II. Teil: Licht und Wärme. Mit 47 Abbildungen. Nr. 77.

— III. Teil: Elektrizität und Magnetismus. Mit 33 Abbildungen. Nr. 78.

— IV. Teil: Elektromagnetische Lichttheorie und Elektronik. Mit 21 Figuren. Nr. 374.

Radioaktivität von Wilh. Frommel. Mit 18 Figuren. Nr. 317.

Physikalische Messungsmethoden von Dr. Wilhelm Bahrdt, Oberlehrer an der Oberrealschule in Groß-Lichterfelde. Mit 49 Figuren. Nr. 301.

Physikalische Aufgabensammlung von G. Mahler, Professor am Gymnasium in Ulm. Mit den Resultaten. Nr. 243.

Physikalische Formelsammlung von G. Mahler, Professor am Gymnasium in Ulm. Nr. 136.

Physikalisch-Chemische Rechenaufgaben von Prof. Dr. R. Abegg und Privatdozent Dr. O. Sackur, beide an der Universität Breslau. Nr. 445.

Vektoranalysis von Dr. Siegfr. Valentiner, Privatdozent für Physik an der Universität Berlin. Mit 11 Figuren. Nr. 354.

Geschichte der Chemie von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Technischen Hochschule Stuttgart. I: Von den ältesten Zeiten bis zur Verbrennungstheorie von Lavoisier. Nr. 264.

— II: Von Lavoisier bis zur Gegenwart. Nr. 265.

Anorganische Chemie von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 37.

Metalloide (Anorganische Chemie I. Teil) von Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Kgl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 211.

Metalle (Anorganische Chemie II. Teil) von Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Kgl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 212.

Organische Chemie von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 38.

Chemie der Kohlenstoffverbindungen von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I. II: Aliphatische Verbindungen. 2 Teile. Nr. 191, 192.

Chemie der Kohlenstoffverbindungen von Dr. Hugo Bauer. III: Karbocyklische Verbindungen. Nr. 193.

— IV: Heterocyklische Verbindungen. Nr. 194.

Analytische Chemie von Dr. Johannes Hoppe. I: Theorie und Gang der Analyse. Nr. 247.

— II: Reaktion der Metalloide und Metalle. Nr. 248.

Maßanalyse von Dr. Otto Röhm in Stuttgart. Mit 14 Fig. Nr. 221.

Technisch-Chemische Analyse von Dr. G. Lunge, Prof. an der Eidgen. Polytechn. Schule in Zürich. Mit 16 Abbildungen. Nr. 195.

Stereochemie v. Dr. E. Wedekind, Prof. a. d. Univ. Tübingen. Mit 34 Abbildungen. Nr. 201.

Allgemeine und physikalische Chemie von Dr. Max Rudolphi, Professor an der Techn. Hochschule in Darmstadt. Mit 22 Figuren. Nr. 71.

Elektrochemie von Dr. Heinrich Danneel in Friedrichshagen. I. Teil: Theoretische Elektrochemie und ihre physikal.-chemischen Grundlagen. Mit 18 Figuren. Nr. 252.

— II: Experimentelle Elektrochemie, Meßmethoden, Leitfähigkeit, Lösungen. Mit 26 Figuren. Nr. 253.

Toxikologische Chemie von Privatdozent Dr. E. Mannheim in Bonn. Mit 6 Abbildungen. Nr. 465.

Agrikulturchemie. I: **Pflanzenernährung** von Dr. Karl Grauer. Nr. 329.

Das agrikulturchemische Kontrollwesen v. Dr. Paul Krische in Göttingen. Nr. 304.

Agrikulturchemische Untersuchungsmethoden von Prof. Dr. Emil Haselhoff, Vorsteher der landwirtschaftlichen Versuchsstation in Marburg in H. Nr. 470.

Physiologische Chemie von Dr. med. A. Legahn in Berlin. I: Assimilation. Mit 2 Tafeln. Nr. 240.

— II: Dissimilation. Mit einer Tafel. Nr. 241.

Meteorologie von Dr. W. Trabert, Prof. an der Universität Innsbruck. Mit 49 Abbildungen und 7 Tafeln. Nr. 54.

Erdmagnetismus, Erdstrom und Polarlicht von Dr. A. Nippoldt jr., Mitglied d. Kgl. Preuß. Meteorol. Instituts zu Potsdam. Mit 14 Abbild. u. 3 Taf. Nr. 175.

Astronomie. Größe, Bewegung und Entfernung der Himmelskörper von A. F. Möbius, neu bearbeitet von Dr. Herm. Kobold, Prof. an der Univ. Kiel. I: Das Planetensystem. Mit 33 Abbildungen. Nr. 11.

Astrophysik. Die Beschaffenheit der Himmelskörper von Prof. Dr. Walter F. Wislicenus. Neu bearb. v. Dr. H. Ludendorff, Potsdam. Mit 15 Abbildungen. Nr. 91.

Astronomische Geographie von Dr. Siegm. Günther, Prof. an der Techn. Hochschule in München. Mit 52 Abbildungen. Nr. 92.

Physische Geographie von Dr. Siegm. Günther, Prof. an der Königl. Techn. Hochschule in München. Mit 32 Abbildungen. Nr. 26.

Physische Meereskunde von Prof. Dr. Gerhard Schott, Abteilungsvorsteher an der Deutschen Seewarte in Hamburg. Mit 39 Abbildungen im Text und 8 Tafeln. Nr. 112.

Klimakunde I: Allgemeine Klimalehre von Prof. Dr. W. Köppen, Meteorologe der Seewarte Hamburg. Mit 7 Taf. u. 2 Fig. Nr. 114.

Paläoklimatologie von Dr. Wilh. R. Eckardt in Aachen. Nr. 482.

Bibliothek der Physik.

Siehe unter Naturwissenschaften.

Bibliothek der Chemie.

Siehe unter Naturwissenschaften und Technologie.

Bibliothek der Technologie.

Chemische Technologie.

Allgemeine chemische Technologie v. Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. Nr. 113.

Die Fette und Öle sowie die **Seifen- und Kerzenfabrikation** und die **Harze, Lacke, Firnisse** mit ihren wichtigsten Hülfsstoffen von Dr. Karl Braun. I: Einführung in die Chemie, Besprechung einiger Salze und der Fette und Öle. Nr. 335.

— II: Die Seifenfabrikation, die Seifenanalyse und die Kerzenfabrikation. Mit 25 Abbildungen. Nr. 336.

— III: Harze, Lacke, Firnisse. Nr. 337.

Ätherische Öle und Riechstoffe von Dr. F. Rochussen in Miltitz. Mit 9 Abbildungen. Nr. 446.

Die Explosivstoffe. Einführung in die Chemie der explosiven Vorgänge von Dr. H. Brunswig in Neubabelsberg. Mit 16 Abbildungen. Nr. 333.

Brauereiwesen I: Mälzerei von Dr. Paul Dreverhoff, Direktor der Brauer- und Mälzerschule in Grimma. Mit 16 Abbildungen. Nr. 303.

Das Wasser und seine Verwendung in Industrie und Gewerbe von Dipl.-Ing. Dr. Ernst Leher. Mit 15 Abbildungen. Nr. 261.

Wasser und Abwässer. Ihre Zusammensetzung, Beurteilung und Untersuchung von Prof. Dr. Emil Haselhoff, Vorsteher der landwirtschaftlichen Versuchsstation in Marburg in Hessen. Nr. 473.

Zündwaren von Direktor Dr. Alfons Bujard, Vorstand des Städt. Chemisch. Laboratoriums in Stuttgart. Nr. 109.

Anorganische chemische Industrie von Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. I: Die Leblancsodaindustrie und ihre Nebenzweige. Mit 12 Tafeln. Nr. 205.

— II: Salinenwesen, Kalisalze, Düngerindustrie und Verwandtes. Mit 6 Tafeln. Nr. 206.

— III: Anorganische Chemische Präparate. Mit 6 Tafeln. Nr. 207.

Metallurgie von Dr. Aug. Geitz in München. 2 Bde. Mit 21 Fig. Nr. 313, 314.

Elektrometallurgie von Reg.-R. Dr. Fr. Regelsberger in Steglitz-Berlin. Mit 16 Figuren. Nr. 110.

Die Industrie der Silikate, der künstlichen Bausteine und des Mörtels von Dr. Gustav Rauter. I: Glas- und keramische Industrie. Mit 12 Taf. Nr. 233.

— II: Die Industrie der künstlichen Bausteine und des Mörtels. Mit 12 Tafeln. Nr. 234.

Die Teerfarbstoffe mit besonderer Berücksichtigung der synthetischen Methoden von Dr. Hans Bucherer, Prof. a. d. Kgl. Techn. Hochschule Dresden. Nr. 214.

Mechanische Technologie.

Mechanische Technologie von Geh. Hofrat Prof. A. Lüdicke in Braunschweig. 2 Bde. Nr. 340, 341.

Textil-Industrie I: Spinnerei und Zwirnerei von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 39 Fig. Nr. 184.

— **II:** Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Figuren. Nr. 185.

— **III:** Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe von Dr. Wilh. Massot, Lehrer an der Preuß. höh. Fachschule für Textil-Industrie in Krefeld. Mit 28 Figuren. Nr. 186.

Die Materialien des Maschinenbaues und der Elektrotechnik von Ingenieur Prof. Herm. Wilda in Bremen. Mit 3 Abbildungen. Nr. 476.

Das Holz. Aufbau, Eigenschaften und Verwendung, von Prof. Herm. Wilda in Bremen. Mit 33 Abbildungen. Nr. 459.

Das autogene Schweiß- und Schneidverfahren von Ingenieur Hans Niese in Kiel. Mit 30 Figuren. Nr. 499.

Bibliothek der Ingenieurwissenschaften.

Das Rechnen in der Technik u. seine Hilfsmittel (Rechenschieber, Rechentafeln, Rechenmaschinen usw.) von Ingenieur Joh. Eugen Mayer in Karlsruhe i. B. Mit 30 Abb. Nr. 405.

Materialprüfungswesen. Einführung in die moderne Technik der Materialprüfung von K. Memmler, Diplom-Ingenieur, ständ. Mitarbeiter am Kgl. Materialprüfungsamte zu Groß-Lichterfelde. I: Materialeigenschaften. — Festigkeitsversuche. — Hilfsmittel für Festigkeitsversuche. Mit 58 Figuren. Nr. 311.

— **II:** Metallprüfung und Prüfung von Hilfsmaterialien des Maschinenbaues. — Baumaterialprüfung. — Papierprüfung. — Schmiermittelprüfung. — Einiges über Metallographie. Mit 31 Figuren. Nr. 312.

Metallographie. Kurze, gemeinfaßliche Darstellung der Lehre von den Metallen und ihren Legierungen, unter besonderer Berücksichtigung der Metallmikroskopie von Prof. E. Heyn und Prof. O. Bauer am Kgl. Materialprüfungsamt (Groß-Lichterfelde) der Kgl. Technischen Hochschule zu Berlin. I: Allgemeiner Teil. Mit 45 Abbildungen im Text und 5 Lichtbildern auf 3 Tafeln. Nr. 432.

— **II:** Spezieller Teil. Mit 49 Abbildungen im Text und 37 Lichtbildern auf 19 Tafeln. Nr. 433.

Statik. I: Die Grundlehren der Statik starrer Körper von W. Hauber, Diplom-Ingenieur. Mit 82 Figuren. Nr. 178.

— **II:** Angewandte Statik. Mit 61 Figuren. Nr. 179.

Festigkeitslehre von W. Hauber, Diplom-Ingenieur. Mit 56 Figuren. Nr. 288.

Aufgabensammlung zur Festigkeitslehre mit Lösungen von R. Haren, Diplom-Ingenieur in Mannheim. Mit 42 Figuren. Nr. 491.

Hydraulik v. W. Hauber, Diplom-Ingenieur in Stuttgart. Mit 44 Fig. Nr. 397.

Geometrisches Zeichnen von H. Becker, Architekt und Lehrer an der Baugewerkschule in Magdeburg, neubearbeitet von Professor J. Vonderlinn in Münster. Mit 290 Figuren und 23 Tafeln im Text. Nr. 58.

Schattenkonstruktionen von Prof. J. Vonderlinn in Münster. Mit 114 Fig. Nr. 236.

Parallelperspektive. Rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie von Prof. J. Vonderlinn in Münster. Mit 121 Figuren. Nr. 260.

Zentral-Perspektive von Architekt Hans Freyberger, neubearbeitet von Prof. J. Vonderlinn, Dir. d. Kgl. Baugewerkschule, Münster i. W. Mit 132 Figuren. Nr. 57.

Technisches Wörterbuch, enthaltend die wichtigsten Ausdrücke des Maschinenbaues, Schiffbaues und der Elektrotechnik von Erich Krebs in Berlin.
I. Teil: Deutsch-Englisch. Nr. 395.
— II. Teil: Englisch-Deutsch. Nr. 396.
— III. Teil: Deutsch-Französisch. Nr. 453.
— IV. Teil: Französisch-Deutsch. Nr. 454.

Elektrotechnik. Einführung in die moderne Gleich- und Wechselstromtechnik von J. Herrmann, Professor an der Königlich Technischen Hochschule Stuttgart. I: Die physikalischen Grundlagen. Mit 42 Fig. u. 10 Tafeln. Nr. 196.
— II: Die Gleichstromtechnik. Mit 103 Figuren und 16 Tafeln. Nr. 197.
— III: Die Wechselstromtechnik. Mit 126 Fig. u. 16 Taf. Nr. 198.

Die elektrischen Meßinstrumente. Darstellung der Wirkungsweise der gebräuchlichsten Meßinstrumente der Elektrotechnik und kurze Beschreibung ihres Aufbaues von J. Herrmann, Prof. an der Königl. Techn. Hochschule Stuttgart. Mit 195 Fig. Nr. 477.

Radioaktivität von Chemiker Wilh. Frommel. Mit 18 Abbildungen. Nr. 317.

Die Gleichstrommaschine von C. Kinzbrunner, Ingenieur u. Dozent für Elektrotechnik a. d. Municipal School of Technology in Manchester. Mit 78 Fig. Nr. 257.

Ströme und Spannungen in Starkstromnetzen von Diplom-Elektroingenieur Josef Herzog in Budapest u. Prof. Feldmann in Delft. Mit 68 Fig. Nr. 456.

Die elektrische Telegraphie von Dr. Ludwig Rellstab. Mit 19 Figuren. Nr. 172.

Das Fernsprechwesen v. Dr. Ludw. Rellstab in Berlin. Mit 47 Fig. u. 1 Taf. Nr. 155.

Vermessungskunde von Dipl.-Ing. Oberlehrer P. Werkmeister. 2 Bändchen. Mit 255 Abbildungen. Nr. 468, 469.

Maurer- u. Steinhauerarbeiten von Prof. Dr. phil. u. Dr.-Ing. Eduard Schmitt in Darmstadt. 3 Bändchen. Mit vielen Abbildungen. Nr. 419—421.

Zimmerarbeiten von Carl Opitz, Oberlehrer an der Kais. Technischen Schule in Straßburg i. E. I: Allgemeines, Balkenlagen, Zwischendecken und Deckenbildungen, hölzerne Fußböden, Fachwerkswände, Hänge- und Sprengewerke. Mit 169 Abbildungen. Nr. 489.
— II: Dächer, Wandbekleidungen, Simsschalungen, Block-, Bohlen- und Bretterwände, Zäune, Türen, Tore, Tribünen und Baugerüste. Mit 167 Abbildungen. Nr. 490.

Eisenkonstruktionen im Hochbau. Kurzgefaßtes Handbuch mit Beispielen von Ingenieur Karl Schindler in Meißen. Mit 115 Figuren. Nr. 322.

Der Eisenbetonbau von Reg.-Baumeister Karl Rößle in Berlin-Steglitz. Mit 77 Abbildungen. Nr. 349.

Heizung und Lüftung von Ingenieur Johannes Körting, Direktor der Akt.-Ges. Gebrüder Körting in Düsseldorf. I: Das Wesen und die Berechnung der Heizungs- und Lüftungsanlagen. Mit 31 Figuren. Nr. 342.
— II: Die Ausführung der Heizungs- und Lüftungsanlagen. Mit 195 Fig. Nr. 343.

Gas- und Wasserinstallationen mit Einschluß der Abortanlagen von Professor Dr. phil. u. Dr.-Ing. Eduard Schmitt in Darmstadt. Mit 119 Abbild. Nr. 412.

Das Veranschlagen im Hochbau. Kurzgefaßtes Handbuch über das Wesen des Kostenanschlages von Emil Beutinger, Architekt B.D.A., Assistent an der Technischen Hochschule in Darmstadt. Mit vielen Figuren. Nr. 385.

Bauführung. Kurzgefaßtes Handbuch über das Wesen der Bauführung von Architekt Emil Beutinger, Assistent an der Technischen Hochschule in Darmstadt. Mit 25 Figuren und 11 Tabellen. Nr. 399.

Die Baukunst des Schulhauses von Prof. Dr.-Ing. Ernst Vetterlein in Darmstadt. I: Das Schulhaus. Mit 88 Abbildungen. Nr. 443.

— II: Die Schulräume. — Die Nebenanlagen. Mit 31 Abbildungen. Nr. 444.

Öffentliche Bade- und Schwimmanstalten von Dr. Karl Wolff, Stadt-Oberbaurat in Hannover. Mit 50 Fig. Nr. 380.

Wasserversorgung der Ortschaften von Dr.-Ing. Rob. Weyrauch, Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart. Mit 85 Figuren. Nr. 5.

Die Kalkulation im Maschinenbau von Ingenieur H. Bethmann, Dozent am Technikum Altenburg. Mit 61 Abbildungen. Nr. 486.

Die Maschinenelemente. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium und den praktischer Gebrauch von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 86 Figuren. Nr. 3.

Metallurgie von Dr. Aug. Geitz, diplom. Chemiker in München. I. II. Mit 21 Figuren. Nr. 313, 314.

Eisenhüttenkunde von A. Krauß, diplomierter Hütteningenieur. I: Das Roheisen. Mit 17 Figuren und 4 Tafeln. Nr. 152.

— II: Das Schmiedeisen. Mit 25 Figuren und 5 Tafeln. Nr. 153.

Lötrohrprobierkunde. Qualitative Analyse mit Hilfe des Lötrohres von Dr. Martin Henglein in Freiberg. Mit 10 Figuren. Nr. 483.

Technische Wärmelehre (Thermodynamik) von K. Walther und M. Röttinger, Diplom-Ingenieuren. Mit 54 Figuren. Nr. 242.

Die thermodynamischen Grundlagen der Wärmekraft- und Kältemaschinen von M. Röttinger, Diplom-Ingenieur in Mannheim. Mit 73 Figuren. Nr. 2.

Die Dampfmaschine. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium u. d. prakt. Gebrauch v. Friedr. Barth, Obering., Nürnberg. Mit 48 Fig. Nr. 8.

Die Dampfkessel. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium u. den prakt. Gebrauch v. Friedr. Barth, Obering., Nürnberg. Mit 67 Fig. Nr. 9.

Die Gaskraftmaschinen. Kurzgefaßte Darstellung der wichtigsten Gasmaschinen-Bauarten v. Ingenieur Alfred Kirschke in Halle a. S. Mit 55 Figuren. Nr. 316.

Die Dampfturbinen, ihre Wirkungsweise und Konstruktion von Ing. Hermann Wilda, Professor am staatl. Technikum in Bremen. Mit 104 Abb. Nr. 274.

Die zweckmäßigste Betriebskraft von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. I: Einleitung. Dampfkraftanlagen. Verschiedene Kraftmaschinen. Mit 27 Abbildungen. Nr. 224.

— II: Gas-, Wasser- und Wind-Kraftanlagen. Mit 31 Abbildungen. Nr. 225.

— III: Elektromotoren. Betriebskostentabellen. Graphische Darstellungen. Wahl der Betriebskraft. Mit 27 Abbildungen. Nr. 474.

Eisenbahnfahrzeuge von H. Hinnenthal, Kgl. Regierungsbaumeister und Oberingenieur in Hannover. I: Die Lokomotiven. Mit 89 Abbildungen im Text und 2 Tafeln. Nr. 107.

— II: Die Eisenbahnwagen und Bremsen. Mit 56 Abbildungen im Text und 3 Tafeln. Nr. 108.

Die Hebezeuge, ihre Konstruktion und Berechnung von Ingenieur Hermann Wilda, Prof. am staatl. Technikum in Bremen. Mit 399 Abbildungen. Nr. 414.

Pumpen, hydraulische und pneumatische Anlagen. Ein kurzer Überblick von Regierungsbaumeister Rudolf Vogdt, Oberlehrer an der Königl. höheren Maschinenbauschule in Posen. Mit 59 Abbildungen. Nr. 290.

Die landwirtschaftlichen Maschinen von Karl Walther, Diplom-Ingenieur in Mannheim. 3 Bändchen. Mit vielen Abbildungen. Nr. 407—409.

Die Preßluftwerkzeuge von Diplom-Ingenieur P. Iltis, Oberlehrer an der Kaiserl. Technischen Schule in Straßburg. Mit 82 Figuren. Nr. 493.

Nautik. **Kurzer Abriß des täglich an Bord von Handelsschiffen angewandten Teils der Schiffahrtskunde.** Von Dr. Franz Schulze, Direktor der Navigationsschule zu Lübeck. Mit 56 Abbildungen. Nr. 84

Bibliothek der Rechts- u. Staatswissenschaften.

Allgemeine Rechtslehre von Dr. Th. Sternberg, Privatdozent an der Univers. Lausanne. I: Die Methode. Nr. 169.

— II: Das System. Nr. 170.

Recht des Bürgerlichen Gesetzbuches. Erstes Buch: Allgemeiner Teil. I: Einleitung — Lehre von den Personen und von den Sachen von Dr. Paul Oertmann, Professor an der Universität Erlangen. Nr. 447.

— — II: Erwerb und Verlust, Geltendmachung und Schutz der Rechte von Dr. Paul Oertmann, Professor an der Universität Erlangen. Nr. 448.

— **Zweites Buch:** Schuldrecht. I. Abteilung: Allgemeine Lehren von Dr. Paul Oertmann, Professor an der Universität Erlangen. Nr. 323.

— — II. Abteilung: Die einzelnen Schuldverhältnisse von Dr. Paul Oertmann, Professor an der Universität Erlangen. Nr. 324.

— **Drittes Buch:** Sachenrecht von Dr. F. Kretzschmar, Oberlandesgerichtsrat in Dresden. I: Allgemeine Lehren. Besitz und Eigentum. Nr. 480.

— — II: Begrenzte Rechte. Nr. 481.

— **Viertes Buch:** Familienrecht von Dr. Heinrich Titze, Professor an der Univ. Göttingen. Nr. 305.

Deutsches Handelsrecht von Prof. Dr. Karl Lehmann in Rostock. 2 Bändchen. Nr. 457, 458.

Das deutsche Seerecht von Dr. Otto Brandis, Oberlandesgerichtsrat in Hamburg. 2 Bände. Nr. 386, 387.

Postrecht von Dr. Alfred Wolcke, Postinspektor in Bonn. Nr. 425.

Allgemeine Staatslehre von Dr. Hermann Rehm, Prof. an der Universität Straßburg i. E. Nr. 358.

Allgemeines Staatsrecht von Dr. Julius Hatschek, Prof. an der Universität Göttingen. 3 Bändchen. Nr. 415—417.

Preußisches Staatsrecht von Dr. Fritz Stier-Somlo, Prof. an der Univers. Bonn. 2 Teile. Nr. 298, 299.

Deutsches Zivilprozeßrecht von Professor Dr. Wilhelm Kisch in Straßburg i. E. 3 Bände. Nr. 428—430.

Kirchenrecht von Dr. Emil Sehling, ord. Prof. der Rechte in Erlangen. Nr. 377.

Das deutsche Urheberrecht an literarischen, künstlerischen und gewerblichen Schöpfungen, mit besonderer Berücksichtigung der internationalen Verträge von Dr. Gustav Rauter, Patentanwalt in Charlottenburg. Nr. 263.

Der internationale gewerbliche Rechtsschutz von J. Neuberg, Kaiserl. Regierungsrat, Mitglied des Kaiserl. Patentamts zu Berlin. Nr. 271.

Das Urheberrecht an Werken der Literatur und der Tonkunst, das Verlagsrecht und das Urheberrecht an Werken der bildenden Künste und der Photographie von Staatsanwalt Dr. J. Schlittgen in Chemnitz. Nr. 361.

Das Warenzeichenrecht. Nach dem Gesetz zum Schutz der Warenbezeichnungen vom 12. Mai 1894 von J. Neuberg, Kaiserl. Regierungsrat, Mitglied des Kaiserl. Patentamtes zu Berlin. Nr. 360.

Der unlautere Wettbewerb von Rechtsanwalt Dr. Martin Wassermann in Hamburg. Nr. 339.

Deutsches Kolonialrecht von Dr. H. Edler v. Hoffmann, Professor an der Kgl. Akademie Posen. Nr. 318.

Militärstrafrecht von Dr. Max Ernst Mayer, Prof. an der Universität Straßburg i. E. 2 Bände. Nr. 371, 372.

Deutsche Wehrverfassung von Kriegsgerichtsrat Carl Endres i. Würzburg. Nr. 401.

Forensische Psychiatrie von Prof. Dr. W. Weygandt, Direktor der Irrenanstalt Friedrichsberg in Hamburg. 2 Bändchen. Nr. 410 u. 411.

Volkswirtschaftliche Bibliothek.

Volkswirtschaftslehre von Dr. Carl Johs. Fuchs, Professor an der Universität Tübingen. Nr. 133.

Volkswirtschaftspolitik von Präsident Dr. R. van der Borght in Berlin. Nr. 177.

Gewerbewesen von Dr. Werner Sombart, Professor an der Handelshochschule Berlin. 2 Bände. Nr. 203, 204.

Das Handelswesen von Dr. Wilh. Lexis, Professor an der Universität Göttingen. I: Das Handelspersonal und der Warenhandel. Nr. 296.

— II. Die Effektenbörse und die innere Handelspolitik. Nr. 297.

Auswärtige Handelspolitik von Dr. Heinrich Sieveking, Professor an der Universität Zürich. Nr. 245.

Das Versicherungswesen von Dr. jur. Paul Moldenhauer, Professor der Versicherungswissenschaft an der Handelshochschule Köln. Nr. 262.

Versicherungsmathematik von Dr. Alfred Loewy, Professor an der Universität Freiburg i. B. Nr. 180.

Die gewerbliche Arbeiterfrage von Dr. Werner Sombart, Professor an der Handelshochschule Berlin. Nr. 209.

Die Arbeiterversicherung von Professor Dr. Alfred Manes in Berlin. Nr. 267.

Finanzwissenschaft von Präsident Dr. R. van der Borght in Berlin. I. Allgemeiner Teil. Nr. 148.

— II. Besonderer Teil (Steuerlehre). Nr. 391.

Die Steuersysteme des Auslandes von Geh. Oberfinanzrat O. Schwarz in Berlin. Nr. 426.

Die Entwicklung der Reichsfinanzen von Präsident Dr. R. van der Borght in Berlin. Nr. 427.

Die Finanzsysteme der Großmächte. (Internat. Staats- u. Gemeinde-Finanzwesen.) Von O. Schwarz, Geh. Oberfinanzrat, Berlin. 2 Bdch. Nr. 450, 451.

Soziologie von Prof. Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 101.

Die Entwicklung der sozialen Frage von Prof. Dr. Ferd. Tönnies in Eutin. Nr. 353.

Armenwesen und Armenfürsorge. Einführung in die soziale Hilfsarbeit von Dr. Adolf Weber, Professor an der Handelshochschule in Köln. Nr. 346.

Die Wohnungsfrage von Dr. L. Pohle, Professor der Staatswissenschaften zu Frankfurt a. M. I: Das Wohnungswesen in der modernen Stadt. Nr. 495.

— II: Die städtische Wohnungs- und Bodenpolitik. Nr. 496.

Das Genossenschaftswesen in Deutschland von Dr. Otto Lindecke, Sekretär des Hauptverbandes deutscher gewerblicher Genossenschaften. Nr. 384.

Theologische und religionswissenschaftliche Bibliothek.

Die Entstehung des Alten Testaments von Lic. Dr. W. Staerk, Professor an der Universität in Jena. Nr. 272.

Alttestamentliche Religionsgeschichte von D. Dr. Max Löhr, Professor an der Universität Breslau. Nr. 292.

Geschichte Israels bis auf die griechische Zeit von Lic. Dr. J. Benzinger. Nr. 231.

Landes- u. Volkskunde Palästinas von Lic. Dr. Gustav Hölscher in Halle. Mit 8 Vollbildern und 1 Karte. Nr. 345.

Die Entstehung d. Neuen Testaments v. Prf. Lic. Dr. Carl Clemen in Bonn. Nr. 285.

Die Entwicklung der christlichen Religion innerhalb des Neuen Testaments von Prof. Lic. Dr. Carl Clemen in Bonn. Nr. 388.

Neutestamentliche Zeitgeschichte von Lic. Dr. W. Staerk, Professor an der Universität in Jena. I: Der historische u. kulturgeschichtliche Hintergrund des Urchristentums. Nr. 325.

— II: Die Religion des Judentums im Zeitalter des Hellenismus und der Römerherrschaft. Nr. 326.

Die Entstehung des Talmuds von Dr. S. Funk in Boskowitz. Nr. 479.

Abriß der vergleichenden Religionswissenschaft von Prof. Dr. Th. Achelis in Bremen. Nr. 208.

Die Religionen der Naturvölker im Umriß von Dr. Th. Achelis, weiland Professor in Bremen. Nr. 449.

Indische Religionsgeschichte von Prof. Dr. Edmund Hardy. Nr. 83.

Buddha von Professor Dr. Edmund Hardy. Nr. 174.

Griechische und römische Mythologie von Dr. Hermann Steuding, Rektor des Gymnasiums in Schneeberg. Nr. 27.

Germanische Mythologie von Dr. E. Mogk, Professor an der Universität Leipzig. Nr. 15.

Die deutsche Heldensage von Dr. Otto Luitpold Jiriczek, Professor an der Universität Münster. Nr. 32.

Pädagogische Bibliothek.

Pädagogik im Grundriß von Professor Dr. W. Rein, Direktor des Pädagogischen Seminars an der Universität in Jena. Nr. 12.

Geschichte der Pädagogik von Oberlehrer Dr. H. Weimer in Wiesbaden. Nr. 145.

Schulpraxis. Methodik der Volksschule von Dr. R. Seyfert, Seminardirektor in Zschopau. Nr. 50.

Zeichenschule von Professor K. Kimmich in Ulm. Mit 18 Tafeln in Ton-, Farben- u. Golddruck u. 200 Voll- u. Textbildern. Nr. 39.

Bewegungsspiele von Dr. E. Kohlrausch, Prof. am Kgl. Kaiser-Wilhelms-Gymnasium zu Hannover. Mit 14 Abbildungen. Nr. 96.

Geschichte des deutschen Unterrichtswesens von Professor Dr. Friedrich Seiler, Direktor des Königlichen Gymnasiums zu Luckau. I: Von Anfang an bis zum Ende des 18. Jahrhunderts. Nr. 275.

— II: Vom Beginn des 19. Jahrhunderts bis auf die Gegenwart. Nr. 276.

Das deutsche Fortbildungsschulwesen nach seiner geschichtlichen Entwicklung und in seiner gegenwärtigen Gestalt von H. Sierds, Direktor der städt. Fortbildungsschulen in Heide i. Holstein. Nr. 392.

Die deutsche Schule im Auslande von Hans Amrhein, Direktor der deutschen Schule in Lüttich. Nr. 259.

Bibliothek der Kunst.

Stilkunde von Prof. Karl Otto Hartmann in Stuttgart. Mit 7 Vollbildern und 195 Textillustrationen. Nr. 80.

Die Baukunst des Abendlandes von Dr. K. Schäfer, Assistent am Gewerbemuseum in Bremen. Mit 22 Abbildungen. Nr. 74.

Die Plastik des Abendlandes von Dr. Hans Stegmann, Direktor des Bayr. Nationalmuseums in München. Mit 23 Tafeln. Nr. 116.

Die Plastik seit Beginn des 19. Jahrhunderts von A. Heilmeyer in München. Mit 41 Vollbildern auf amerikanischem Kunstdruckpapier. Nr. 321.

Die graphischen Künste v. Carl Kampmann, k. k. Lehrer an der k. k. Graphischen Lehr- u. Versuchsanstalt in Wien. Mit zahlreichen Abbild. u. Beilagen. Nr. 75.

Die Photographie von H. Keßler, Prof. an der k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit 4 Tafeln und 52 Abbildungen. Nr. 94.

Bibliothek der Musik.

Allgemeine Musiklehre von Professor Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 220.

Musikalische Akustik von Dr. Karl L. Schäfer, Dozent an der Universität Berlin. Mit 35 Abbildungen. Nr. 21.

Harmonielehre von A. Halm. Mit vielen Notenbeilagen. Nr. 120.

Musikalische Formenlehre (Kompositionslehre) von Prof. Stephan Krehl. I. II. Mit vielen Notenbeispielen. Nr. 149, 150.

Kontrapunkt. Die Lehre von der selbständigen Stimmführung von Professor Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 390.

Fuge. Erläuterung und Anleitung zur Komposition derselben von Professor Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 418.

Instrumentenlehre von Musikdirektor Franz Mayerhoff in Chemnitz. I: Text. II: Notenbeispiele. Nr. 437, 438.

Musikästhetik von Dr. K. Grunsky in Stuttgart. Nr. 344.

Geschichte der alten und mittelalterlichen Musik von Dr. A. Möhler. Mit zahlreichen Abbildungen und Musikbeilagen. I. II. Nr. 121, 347.

Musikgeschichte des 17. u. 18. Jahrhunderts v. Dr. K. Grunsky i. Stuttgart. Nr. 239.

— **seit Beginn des 19. Jahrhunderts** von Dr. K. Grunsky in Stuttgart. I. II. Nr. 164, 165.

Bibliothek der Land- und Forstwirtschaft.

Bodenkunde von Dr. P. Vageler in Königsberg i. Pr. Nr. 455.

Ackerbau- und Pflanzenbaulehre von Dr. Paul Rippert in Berlin und Ernst Langenbeck in Bochum. Nr. 232.

Landwirtschaftliche Betriebslehre von Ernst Langenbeck in Bochum. Nr. 227.

Allgemeine und spezielle Tierzuchtlehre von Dr. Paul Rippert in Berlin. Nr. 228.

Agrikulturchemie I: Pflanzenernährung von Dr. Karl Grauer. Nr. 329.

Das agrikulturchemische Kontrollwesen v. Dr. Paul Krische in Göttingen. Nr. 304.

Fischerei und Fischzucht von Dr. Karl Eckstein, Prof. an der Forstakademie Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation des forstlichen Versuchswesens. Nr. 159.

Forstwissenschaft von Dr. Ad. Schwappach, Prof. an der Forstakadem. Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation d. forstlichen Versuchswesens. Nr. 106.

Die Nadelhölzer von Prof. Dr. F. W. Neger in Tharandt. Mit 85 Abbildungen, 5 Tabellen und 3 Karten. Nr. 355.

Handelswissenschaftliche Bibliothek.

Buchführung in einfachen und doppelten Posten von Prof. Robert Stern, Oberlehrer der Öffentlichen Handelslehranstalt und Dozent der Handelshochschule zu Leipzig. Mit Formularen. Nr. 115.

Deutsche Handelskorrespondenz von Prof. Th. de Beaux, Officier de l'Instruction Publique, Oberlehrer a. D. an der Öffentlichen Handelslehranstalt und Lektor an der Handelshochschule zu Leipzig. Nr. 182.

Französische Handelskorrespondenz von Professor Th. de Beaux, Officier de l'Instruction Publique, Oberlehrer a. D. an der Öffentlichen Handelslehranstalt und Lektor an der Handelshochschule zu Leipzig. Nr. 183.

Englische Handelskorrespondenz von E. E. Whitfield, M.-A., Oberlehrer an King Edward VII Grammar School in Kings Lynn. Nr. 237.

Italienische Handelskorrespondenz von Professor Alberto de Beaux, Oberlehrer am Königlichen Institut SS. Annunziata zu Florenz. Nr. 219.

Spanische Handelskorrespondenz v. Dr. Alfredo Nadal de Mariezcurrena. Nr. 295.

Russische Handelskorrespondenz von Dr. Th. v. Kawraysky in Leipzig. Nr. 315.

Kaufmännisches Rechnen von Prof. Richard Just, Oberlehrer an d. Öffentlichen Handelslehranstalt der Dresdener Kaufmannschaft. 3 Bde. Nr. 139, 140, 187.

Warenkunde von Dr. Karl Hassack, Professor an der Wiener Handelsakademie.
I: Unorganische Waren. Mit 40 Abbildungen. Nr. 222.
— II: Organische Waren. Mit 36 Abbildungen. Nr. 223.

Drogenkunde von Rich. Dorstewitz in Leipzig und Georg Ottersbach in Hamburg. Nr. 413.

Maß-, Münz- und Gewichtswesen von Dr. Aug. Blind, Professor an der Handelsschule in Köln. Nr. 283.

Technik des Bankwesens von Dr. Walter Conrad in Berlin. Nr. 484.

Das Wechselwesen von Rechtsanwalt Dr. Rudolf Mothes in Leipzig. Nr. 103.

☛ Siehe auch „Volkswirtschaftliche Bibliothek". Ein ausführliches Verzeichnis der außerdem im Verlage der G. J. Göschenschen Verlagshandlung erschienenen handelswissenschaftlichen Werke kann durch jede Buchhandlung kostenfrei bezogen werden.

Militär- und marinewissenschaftliche Bibliothek.

Das moderne Feldgeschütz. I: Die Entwicklung des Feldgeschützes seit Einführung des gezogenen Infanteriegewehrs bis einschließlich der Erfindung des rauchlosen Pulvers, etwa 1850—1890, v. Oberstleutnant W. Heydenreich, Militärlehrer an der Militärtechn. Akademie in Berlin. Mit 1 Abbild. Nr. 306.

— II: Die Entwicklung des heutigen Feldgeschützes auf Grund der Erfindung des rauchlosen Pulvers, etwa 1890 bis zur Gegenwart, von Oberstleutnant W. Heydenreich, Militärlehrer an der Militärtechn. Akademie in Berlin. Mit 11 Abbildungen. Nr. 307.

Die modernen Geschütze der Fußartillerie. I: Vom Auftreten der gezogenen Geschütze bis zur Verwendung des rauchschwachen Pulvers 1850—1890 von Mummenhoff, Major beim Stabe des Fußartillerie-Regiments General-feldzeugmeister (Brandenburgisches Nr. 3). Mit 50 Textbildern. Nr. 334.

— II: Die Entwicklung der heutigen Geschütze der Fußartillerie seit Einführung des rauchschwachen Pulvers 1890 bis zur Gegenwart. Mit 33 Textbildern. Nr. 362.

Die Entwicklung der Handfeuerwaffen seit der Mitte des 19. Jahrhunderts und ihr heutiger Stand von G. Wrzodek, Oberleutnant im Inf.-Regt. Freiherr Hiller von Gärtringen (4. Posensches) Nr. 59 und Assistent der Königl. Gewehrprüfungskommission. Mit 21 Abbildungen. Nr. 366.

Militärstrafrecht von Dr. Max Ernst Mayer, Prof. an der Universität Straßburg i. E. 2 Bände. Nr. 371, 372.

Deutsche Wehrverfassung von Karl Endres, Kriegsgerichtsrat bei dem Generalkommando des Kgl. bayr. II. Armeekorps in Würzburg. Nr. 401.

Geschichte des Kriegswesens von Dr. Emil Daniels in Berlin. I: Das antike Kriegswesen. Nr. 488.

— II: Das mittelalterliche Kriegswesen. Nr. 498.

Die Entwicklung des Kriegsschiffbaues vom Altertum bis zur Neuzeit. I. Teil: Das Zeitalter der Ruderschiffe und der Segelschiffe für die Kriegsführung zur See vom Altertum bis 1840. Von Tjard Schwarz, Geh. Marinebaurat u. Schiffbau-Direktor. Mit 32 Abbildungen. Nr. 471.

Die Seemacht in der deutschen Geschichte von Wirkl. Admiralitätsrat Dr. Ernst von Halle, Prof. an der Universität Berlin. Nr. 370.

Verschiedenes.

Bibliotheks- und Zeitungswesen.

Volksbibliotheken (Bücher- und Lesehallen), ihre Einrichtung und Verwaltung von Emil Jaeschke, Stadtbibliothekar in Elberfeld. Nr. 332.

Das deutsche Zeitungswesen von Dr. Robert Brunhuber. Nr. 400.

Das moderne Zeitungswesen (System der Zeitungslehre) von Dr. Robert Brunhuber. Nr. 320.

Allgemeine Geschichte des Zeitungswesens von Dr. Ludwig Salomon in Jena. Nr. 351.

Hygiene, Medizin und Pharmazie.

Bewegungsspiele von Dr. E. Kohlrausch, Prof. am Kgl. Kaiser-Wilhelms-Gymnasium zu Hannover. Mit 15 Abbildungen. Nr. 96.

Der menschliche Körper, sein Bau und seine Tätigkeiten, von E. Rebmann, Oberschulrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abbildungen und 1 Tafel. Nr. 18.

Ernährung und Nahrungsmittel von Oberstabsarzt Prof. Dr. Bischoff in Berlin. Mit 4 Figuren. Nr. 464.

Die Infektionskrankheiten und ihre Verhütung von Stabsarzt Dr. W. Hoffmann in Berlin. Mit 12 vom Verfasser gezeichneten Abbildungen und einer Fiebertafel. Nr. 327.

Tropenhygiene von Med.-Rat Prof. Dr. Nocht, Direktor des Institutes für Schiffs- u. Tropenkrankheiten in Hamburg. Nr. 369.

Die Hygiene des Städtebaus von H. Chr. Nußbaum, Prof. an der Techn. Hochschule in Hannover. Mit 30 Abbildungen. Nr. 348.

Die Hygiene des Wohnungswesens von H. Chr. Nußbaum, Prof. an der Techn. Hochschule in Hannover. Mit 20 Abbildungen. Nr. 363.

Gewerbehygiene von Geh. Medizinalrat Dr. Roth in Potsdam. Nr. 350.

Pharmakognosie. Von Apotheker F. Schmitthenner, Assistent am Botan. Institut der Technischen Hochschule Karlsruhe. Nr. 251.

Toxikologische Chemie von Privatdozent Dr. E. Mannheim in Bonn. Mit 6 Abbildungen. Nr. 465.

Drogenkunde von Rich. Dorstewitz in Leipzig u. Georg Ottersbach in Hamburg. Nr. 413.

Photographie.

Die Photographie. Von H. Keßler, Prof. an der k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit 4 Taf. und 52 Abbild. Nr. 94.

Stenographie.

Stenographie nach dem System von F. X. Gabelsberger von Dr. Albert Schramm, Landesamtsassessor in Dresden. Nr. 246.

Die Redeschrift des Gabelsbergerschen Systems von Dr. Albert Schramm, Landesamtsassessor in Dresden. Nr. 368.

Lehrbuch der Vereinfachten Deutschen Stenographie (Einig.-System Stolze-Schrey) nebst Schlüssel, Lesestücken und einem Anhang von Dr. Amsel, Studienrat des Kadettenkorps in Bensberg. Nr. 86.

Redeschrift. Lehrbuch der Redeschrift des Systems Stolze-Schrey nebst Kürzungsbeispielen, Lesestücken, Schlüssel und einer Anleitung zur Steigerung der stenographischen Fertigkeit von Heinrich Dröse, amtl. bad. Landtagsstenographen in Karlsruhe i. B. Nr. 494.

☞ Weitere Bände sind in Vorbereitung. Neueste Verzeichnisse sind jederzeit unberechnet durch jede Buchhandlung zu beziehen. ☜